高級超越函数

第一冊

[美國]彼得曼遺稿編輯部編
主任 Arthur Erdélyi
A. 爱尔台里
張 致 中 譯

科学技術出版社

內 容 提 要

本書就近代应用数学上所有一切特殊函数的歷史起源、定义、理論、有关的基本公式都作了較全面的系統介紹，并举出了相应的参考资料。包罗面很廣，是一部学術性及資料性的讀物。

本書供大專高年級学生、科学研究工作者、工程师等作参考。

高 級 超 越 函 数

第 一 册

Higher Transcendental Functions Vol.I.

原 著 者 [美國] Staff of the Bateman Manuscript Project
Director: Arthur Erdélyi

原出版者 McGraw-Hill Book Co. Inc., 1953 年版

譯 者 張 致 中

*

科 学 技 術 出 版 社 出 版
（上海南京西路 2004 号）
上海市書刊出版業營業許可証出 073 号

上海市印刷五厂印刷 新華書店上海發行所总經售

*

統一書号：13119 · 89

开本 787×1092 耗 1/27 · 印張 $11\frac{23}{27}$ · 字數 227,000
1957 年 8 月第 1 版
1957 年 8 月第 1 次印刷 印數 1—2,400

定价：(10) 1.80 元

譯 者 序

已故美國加利福尼亞工学院数学和理論物理学教授亨利·彼得曼在近代应用数学、气体力学、流体力学、电磁理論、熱力学及地球物理学方面作出的貢献和他在这些学科方面的無比淵博在國际学術界上獲得了很高的評价．他計划編寫一部網罗所有特殊函数的巨著，可惜沒有完成就逝世了．为了紀念这位卓越的学者并使他的著作能傳揚开去为廣大学術、技術界服务，在加省工学院及美海軍研究所的主持下，組織了以 A. Erdélyi 教授为首的彼得曼遺稿編輯部，負責整理彼得曼的著作．現在这部書，就是由这个編輯部以彼得曼遺著为根据編成的．

本書共分上中下三册，举凡应用数学上的特殊函数，在本書中均就其理論及公式作了簡明系統的介紹，并举出了相应的参考資料，包罗面非常廣泛．对研究工作者和技術工作者來說，不妨可譽之为特殊函数的"大字典"．

估計到本書的价值，把它翻譯出來向國內介紹，在目前，当是完全必要的了．

譯 者

彼得曼遺稿編輯部

原文出版者: McGraw-Hill Book Company, Inc.

原文出版期: 1953.

引　言

本書共分三卷，茲为其第一卷．这一部著作可作为魏塔克耳和華特生的名著"近代分析学"第二部分超越函数的最新注解．彼得曼（是 E. T. 魏塔克耳的学生）为他的"函数導論"作了很大的規划．他的著作在詳細說明一些最重要函数的性質之外，还包括了一切不論是首先創立的或深入研究的特殊函数的歷史起源、定义、有关的基本公式及著作目錄．將这些函数按它們的定义分成十二个不同类目，計冪級数、母函数、無窮乘積、叠微分、不定積分、定積分、微分方程、差分方程、函数方程、三角級数、正交函数級数及積分方程．表示每一函数的定積分表及若干新函数的数值表为"導論"的一个組成部分．定積分的推廣表及若干特殊函数数值表的導則也作为著作中的一部分．

这样一部著作的重要意义是不須強調的．彼得曼对过去和現代数学文献方面的無可比拟的知識及其一貫的無比勤奋是本書宏大規模的有力保証，在很多方面也是決定因素；是一部特殊函数的牛津大字典．

我們的能力以及我們整理的时間的現实估价使彼得曼原來的計划有了剧烈的修改．只有彼德曼本人的淵博才能道出許多特殊函数的可靠切实的歷史，我們現有的能力尚不足以收集所有的函数．因此我們只能以列举一些我們認为較为重要的特殊函数的主要性質为限（也許要远比彼得曼所計划的为簡略）．这在数学上所造成的損失是重大的，可惜的，而且是無可挽回的．但我們希望这些損失將可以本書篇幅適当的精簡，組織較为清楚來稍作补償．我們只能希望，本書目前的內容虽远比彼得曼所考慮的为狹，但在遜色的基礎上，本書仍能給讀者以較大的帮助．

本書的編纂

現在我們可說一說編寫本書的大体方法．首先，我們作了一

个試驗性的目錄表．而后由編輯部的每一位年長編輯担任編寫若干章．在这一工作中，年長的編輯均有年輕編輯协助，虽然年輕編輯的主要任务是分别編寫積分変換表．最后，將各章加以修正編訂，以資联貫．在第一册的六章中，麥格紐斯主要負責第二第四章，奧勃赫丁乔負責第一第三章，特列柯米負責第六章．相互关联的各章作適当的必要合作．例如，勒上特函数与超比級数有关，因此由麥格紐斯及奧勃赫丁乔共同規划以資衔接．又如第二、四及五章是互相关联的，由麥格紐斯及爱尔台里共同規划，其余也都如此．

本書各章的特質有很大的不同．这种表現上的不同一部分是由于主要編寫者具有个别的風格，而大部分則由于不同的問題將有不同的函数．基本上重要的常見函数，如 γ-函数，我們力圖說得適当詳細并有很好系統．有几章除証明稍加精簡不能詳細列出外，差不多可作高等教科書讀．另一方面，在应用数学中不常見的一些函数，根据我們現在所知，作了一些極为簡略的敍述，不加以推演．本書中的第五章也許就是这种情形的最明顯例子．有許多函数，其一般理論可以說得很簡單，但其实际应用却有賴于經常使用其無法簡化的公式的驚人排列．在这种情形下，我們在本文内或甚至在該章中專闢一節列出一推廣公式．在这一方面可以一提的是在我們知道戈尔薩特的超比級数全部二次変換表(轉載于第二章)之前还沒有普遍合用的，超比方程退化情形的完全分析(2-2-2)也如此．貝塞耳函数中有这样一个独特的情况，那就是1922年以前的所有結果有完全的系統的記載可查，而在1922年以后所得的結果很多且很分散．在这种情形下，我們决定对華特生書上討論的科目稍予敍述，而集中討論那些至今尙不为周知的結果．概括地說，每一个函数实际上表示它独特的問題，我們决定依每一問題的本身价值來处理．在每一情况下，我們采用了我們認为最好的解——卽使有損于本書的統一性的解．

每章之后附有參考目錄，其所包括不僅为該章所敍材料的文件，而且也足以帮助讀者去找其他資料．这种目錄的完备程度随

作者的个别風格而不同，也因函数的重要性及其本質而有别．但必須指出，这样的目錄并不是研究提要．本書所提到的函数的系統綱要不僅超出了我們的編纂力量；这將大大增加本書的容量．

我們力圖將应用数学中極大部分重要函数都列入．应列入的函数的选擇以及記法的选擇都以数学根据决定．例如合流超比函数的記法有好几种．我們采用数学著作上常用的二种記法中的一种，而对其余一种也略作敍述，但不采用量子論中所用的記法．在数学上不加研究的特殊函数，即使它們已被系統化甚或已在实用上有用的也不列入．另一方面，在这类著作中不常見的特殊函数，如数論中的函数，特殊自守函数等在本書中却都列入．講述这种函数的几章老实說都是試驗性質的，我們完全理解把这种函数并入習慣上所称的特殊函数族中是值得怀疑的．

在本書的許多部分中，我們不能使彼得曼浩瀚的注解得到推廣应用：我們覺得从我們对各种函数的知識經合用文献的补充后較易于進行編纂．虽然如此，在有些时候，彼得曼的注解却得到了廣泛应用．母函数这一章就是根据彼得曼所編的母函数目錄來編寫的．

記法，参考文献

記法的选用是特別困难的，有些特殊函数如第一类貝塞耳函数，具有一般公認的記法．还有一些函数，如合流超比函数，它們有几种本質上不同而各自独立的記法．最难处理的問題是有些函数所用差不多相同的符号具有几种不同的意义，漢米特多項式通常以 $H_n(x)$ 或 $He_n(x)$ 代表，但这个符号有时却表示 $\exp(-x^2)$ 的叠微分所導出的多項式，而有时又用以表示从 $\exp(-\frac{1}{2}x^2)$ 導出的多項式．此外，有的作者用階層 $n!$，有的作者却不用．我們决定在本書中采用一致的記法．在这个原則上，合流超比級数中的偏差最大，在本書的極大部分中，这一級数均用 ${}_1F_1$ 表示，但在第六章中(以后几章中也有)，同一級数却用 Φ 表示 (Ψ 表示合流超比方程的第二个解)．

凡屬可能的时候我們总采用标准記法．在貝塞尔函数的情形中，我們采用 G. N. 華特生在其不朽著作中所用的記法，而对正交多項式則用斯高的記法(除对特种球多項式用 C_n^λ 表示之外)．对于勒让特函数，我們根据楊基 愛姆特，麥格紐斯-奧勃赫丁乔及其他几位作者的記法，把 $(-1,1)$ 区間內勒让特函数的定义和这一区間外复平面內的定义分开．在两可的情形下，我們决定用有較为方便或有更多数値表可用的那种記法．我們固定地用数値表所用的定义，即使有时我們覺得从数学观点來說另一种定义較为合适，亦所不取．所有一切記法在第一次出現时均附說明．本書末尾附有記法表，可帮助讀者了解本書所用任一記法的意义，并有索引，列出本書中任一函数的記法．

虽然各章的参考材料很多都是交叉的，但有許多章还是可以單独閱讀．在同一節里的方程式用簡單的一个数注明，別的章里的方程式用二个数表示，前面一个数表示第几節，后面一个数表示方程式．例如(3)表示本節的方程式(3)，2-1(3)表示第二章第一節中的方程(3)．文献的表示前面是作者名字，后面是發表的年份．与每章末尾所附的参考文献表一致．

本書的龐大和复雜使內容上的錯誤在所难免．編者極願于接受指示和建議，俾使本書在再版时能以改正．

最后，我謹代表編輯部向加利福尼亞工学院，特別是 E. C. 華特生教务長，对他們給我們工作上的指示及我們所遇到的無数問題中所表示的大力协助表示衷心的感謝．同样，我將向我的同事們致謝，在他們的协助之下，本書方能獲得出版．

A. 爱尔台里

目　　录

第四章 廣义超比級数 ………… 179

第五章 超比級数的進一步推廣 ………… 198

第六章 合流超比函数 ··· 243

第一章 γ函数

1-1. γ函数的定义

函数 $\Gamma(z)$ 可用下列表达式之一来定义:

(1) $\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt=\int_0^1(\ln 1/t)^{z-1}dt,\qquad \mathrm{Re}\, z>0,$

(2) $\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^z}{z(z+1)(1+\frac{1}{2}z)\cdots(1+z/n)}$

$$=z^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}[(1+1/n)^z(1+z/n)^{-1}],$$

(3) $1/\Gamma(z)=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}[(1+z/n)e^{-z/n}],$

式中 γ 代表欧拉或麦歇倫尼常数,且

(4) $\gamma=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}1/n-\ln m\right)=0.5772156649\cdots$

上面(1)式的定义是欧拉所用,(2)式(記法略有不同)系高斯所用,而(3)式則为韋尔司特拉斯所用.

在(1)式中用 st (s 为正实数)代 t,得

(5) $\Gamma(z)=s^z\int_0^\infty e^{-st}t^{z-1}dt,\qquad \mathrm{Re}\, z>0.$

可以証明[見 1-5 (34)] 上面这个公式在 s 为复数、并沿原点至 $\infty e^{i\delta}$ 的直綫路徑進行積分时亦能適合. 由此得

(6) $\Gamma(z)=s^z\int_0^{\infty e^{i\delta}}e^{-st}t^{z-1}dt$

$$-(\tfrac{1}{2}\pi+\delta)<\arg s<\tfrac{1}{2}\pi-\delta,\qquad \mathrm{Re}\, z>0.$$

只要 $0<Re\, z<1$. 則上面公式对 $\arg s+\delta=\pm\frac{1}{2}\pi$ 適合.

由(2)及(3)可知, γ 函数为 z 的一个解析函数,其唯有的可去奇点为 $z=0,\ -1,\ -2\cdots$. 由(1)有

(7) $\Gamma(z)=\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt+\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt=P(z)+Q(z),$

其中 $Q(z)$ 为一整函数. 將 e^{-t} 展开为冪級数,并逐項積分:

$$(8)\qquad P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[n!(z+n)]^{-1}.$$

由此可知 $(-1)^n/n!$ 是 $\Gamma(z)$ 單極点 $z=-n(n=0, 1, 2\cdots)$ 的留数[見 1-17(11)].

現在我們來証明表达式(1), (2), (3)代表的是同一函数.

对于一个正整数 n 及 $Re\,z>0$, 重复作分部積分,得

$$\int_0^n(1-t/n)^n t^{z-1}dt=\frac{n!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)},$$

因此由頓納萊定理,得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n(1-t/n)^n t^{z-1}dt=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

由此知(1)与(2)是等价的. (3) 可以用如下方法从(2)式中導出. 由(2)得

$$1/\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}z(1+z)(1+\tfrac{1}{2}z)\cdots(1+z/n)e^{-z\ln n}$$

或 $$1/\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}[z(1+z)e^{-z}(1+\tfrac{1}{2}z)e^{-\frac{1}{2}z}\cdots(1+z/n)e^{-z/n}\times e^{z(1+\frac{1}{2}+\cdots+1/n-\ln n)}].$$

最后

$$1/\Gamma(z)=z\,e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}[(1+z/n)e^{-z/n}].$$

如果 z 的实部是負数,且 $n+1>\mathrm{Re}(-z)>n$, $(n=0, 1, 2,\cdots)$, 則 $\Gamma(z)$ 可以用柯西-薩尔素茨(Whittaker-Watson, 1927. p. 243)型積分來表示:

$$(9)\qquad \Gamma(z)=\int_0^\infty\left[e^{-t}-\sum_{m=0}^{n}(-t)^m/m!\right]t^{z-1}dt,$$

$$-(n+1)<\mathrm{Re}\,z<-n.$$

1-2. $\Gamma(z)$ 所滿足的函数方程

將 1-1 (1) 式作分部積分,

$$\Gamma(z)=(1/z)\int_0^\infty e^{-t}t^z\,dt=(1/z)\Gamma(1+z),$$

或

(1)　$\Gamma(1+z)=z\Gamma(z)$,

因而,如果 n 为正整数,则

(2)　$\Gamma(z+n)=z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)\Gamma(z)$,

由此,

(3)　$$\Gamma(z)/\Gamma(z-n)=(z-1)(z-2)\cdots(z-n)$$
$$=(-1)^n\Gamma(-z+n+1)/\Gamma(-z+1),$$

(4)　$$\Gamma(-z+n)/\Gamma(-z)=(-1)^n z(z-1)\cdots(z-n+1)$$
$$=(-1)^n\Gamma(z+1)/\Gamma(z-n+1)$$

由于
$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}\,dt=1.$$

故知
$$\Gamma(n+1)=1\cdot2\cdot3\cdots n=n!.$$

由 1-1 (3)式有

$$\Gamma(z)\Gamma(-z)=-z^{-2}\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^2/n^2)^{-1}$$

但 (Bromwich, 1947, p. 294)

$$\sin(\pi z)=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^2/n^2)$$

故

(5)　$\Gamma(z)\Gamma(-z)=-\pi z^{-1}\csc(\pi z)$

因此

(6)　$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi\csc(\pi z)$,

或

(7)　$\Gamma(\frac{1}{2}+z)\Gamma(\frac{1}{2}-z)=\pi\sec(\pi z)$.

由(5)及(2)

(8)　$$\frac{\Gamma(n+z)\Gamma(n-z)}{[(n-1)!]^2}=\frac{\pi z}{\sin(\pi z)}\prod_{m=1}^{n-1}(1-z^2/m^2),\quad n=1,2,3\cdots$$

由(7),(2)及(3)

(9)　$$\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2}+z)\Gamma(n+\frac{1}{2}-z)}{[\Gamma(n+\frac{1}{2})]^2}=\frac{1}{\cos(\pi z)}\prod_{m=1}^{n}\left[1-\frac{4z^2}{(2m-1)^2}\right],$$
$$n=1,2,3\cdots$$

設 $z=\frac{1}{2}$，則由(6)及(1)

(10)　$\Gamma(\frac{1}{2})=2\int_0^\infty e^{-v^2}dv=\sqrt{\pi}.$

下面我們來証明高斯及勒让特的乘法公式：

(11)　$\prod_{r=0}^{m-1}\Gamma(z+r/m)=(2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)}m^{\frac{1}{2}-mz}\Gamma(mz),\quad m=2,\ 3,\ 4\cdots$

由 1-1 (2)式，可得

(12)　$H(z)=\prod_{r=0}^{m-1}\Gamma(z+r/m)=\lim_{m\to\infty}n^{mz+\frac{1}{2}(m-1)}(n!)^m N^{-1},$

其中

$$N=mz(mz+1)\cdots(mz+mn)(mz+mn+1)\cdots(mz+mn+n-1)m^{-m(n+1)}.$$

由于

$$\Gamma(mz)=\lim_{n\to\infty}(mn)^{mz}(mn)!\,[mz(mz+1)\cdots(mz+mn)]^{-1},$$

故

(13)　$m^{-mz}\Gamma(mz)/H(z)=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{2}(m+1)}(mn-1)!\,(n!)^{-m}m^{-mn}=1/K.$

假定上式等于 $1/K$，顯然 K 不依賴于 z，因而可在(13)中任意設定 z 的值（例如設 $z=1/m$）來确定．由此

$$\Gamma(1)K/m=H(1/m)=\Gamma(1/m)\Gamma(2/m)\cdots\Gamma[(m-1)/m]\Gamma(1),$$

或

$$K/m=\Gamma(1-1/m)\Gamma(1-2/m)\cdots\Gamma\left(1-\frac{m-1}{m}\right).$$

將最后两式相乘，并应用(6)，有

$$m^2\pi^{m-1}=K^2\prod_{r=1}^{m-1}\sin\left(\frac{\pi r}{m}\right).$$

故

(14)　$K^2=m(2\pi)^{m-1}.$

因为(13)式中所定义的 K 肯定为正数，故由 (12)，(13)，(14) 可証明式(11)．

在 $m=2$ 的情况下，(11) 就是勒让特的倍数公式：

(15)　$\Gamma(2z)=2^{2z-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}).$

1-3. 用 γ 函数表示的某些無窮乘積的表达式

由 1-1(2) 式

$$\frac{2\Gamma(\frac{1}{2})}{z\Gamma(\frac{1}{2}z)\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z)}$$

$$=\frac{(1-z)\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\left[1+\frac{1}{n}\right]^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\right]^{-1}\right\}}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{n}\right]^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\right]^{-1}\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{n}\right]^{-1}\left[1-\frac{z}{(2n+1)}\right]^{-1}}.$$

因为 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, 故有

(1) $$\frac{2\sqrt{\pi}}{z\Gamma(\frac{1}{2}z)\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z)}$$

$$=(1-z)\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{n}\right]\left[\frac{1-z}{(2n+1)}\right]$$

$$=(1-z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1-\frac{z}{3}\right)\cdots$$

由 1-1(3) 式,有

(2) $$\Gamma(u)/\Gamma(u+v)=(1+v/u)e^{\gamma v}\prod_{n=1}^{\infty}[1+v/(u+n)]e^{-v/n}$$

$$=e^{\gamma v}\prod_{n=0}^{\infty}[1+v/(u+n)]e^{-v/(n+1)},$$

因而

(3) $$\Gamma(x+iy)/\Gamma(x)=e^{-i\gamma y}x(x+iy)^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{iy/n}}{1+iy/(n+x)}.$$

由 (2),有

(4) $$\frac{\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1+z_3)\Gamma(z_2-z_3)}=\prod_{n=0}^{\infty}[1+z_3/(z_1+n)][1-z_3/(z_2+n)].$$

米林公式.

(5) $$e^{y\psi(x)}\Gamma(x)/\Gamma(x+y)=\prod_{n=0}^{\infty}[1+y/(n+x)]e^{-y/(n+x)}.$$

可以很容易地証明如下. 由 1-7(3) 式有

$$e^{y\psi(x)}=e^{-\gamma y-y/x}\prod_{n=1}^{\infty}e^{xy/[n(n+x)]},$$

因而由式(2)立即可得式(5).

现在我們在勒让特的倍数公式 1-2(15) 中分别取 $z=2^{-1}v$, $2^{-2}v$, $\cdots 2^{-n}v$, 并將所得的 n 个关系式相乘,消去公因式以后,得

$$\Gamma(v)=2^{2v(1-2^{-n})-n}\Gamma(2^{-n}v)\prod_{m=1}^{n}\left[\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+2^{-m}v\right)\right],$$

或者由 1-2(1) 式得出与此等价的式子:

$$\Gamma(1+v)=2^{2v(1-2^{-n})}\Gamma(1+2^{-n}v)\prod_{m=1}^{n}\left[\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+2^{-m}v\right)\right].$$

取 $n\to\infty$, 則可得如下的克奈公式:

(6) $$\Gamma(1+v)=2^{2v}\prod_{m=1}^{\infty}\left[\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+2^{-m}v\right)\right].$$

关系式

(7) $$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-(z/n)^m\right]=-z^{-m}\left[\prod_{r=1}^{m}\Gamma\left(-ze^{2\pi ir/m}\right)\right]^{-1},$$

$$m=2,3,4\cdots$$

是熟知公式 1-2(4) 的推廣,只須为該式右边的每一 γ 函数引入 1-1(3) 式,并利用下面的关系式

$$\sum_{r=1}^{m}e^{2\pi ir/m}=0,\quad \prod_{r=1}^{m}e^{2\pi ir/m}=(-1)^{m-1},$$

就很容易証明.

最后我們研究一下下面的表达式

$$\begin{aligned}P&=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_k)}{(n-b_1)(n-b_2)\cdots(n-b_k)}\\&=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-a_1/n)\cdots(1-a_k/n)}{(1-b_1/n)\cdots(1-b_k/n)},\end{aligned}$$

其中 $b_1, b_2, b_3, \cdots b_k$ 均为非正整数. 这个無窮乘積絕对收斂的必要条件为 $a_1+a_2+\cdots+a_k-b_1-b_2\cdots-b_k=0$. 这个条件也是充分的,而在这个条件被滿足时,按 1-1(3) 式及 1-2(1) 式,有

(8) $$\begin{aligned}P&=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-a_1/n)e^{a_1/n}\cdots(1-a_k/n)e^{a_k/n}}{(1-b_1/n)e^{b_1/n}\cdots(1-b_k/n)e^{b_k/n}}\\&=\prod_{m=1}^{k}\frac{\Gamma(1-b_m)}{\Gamma(1-a_m)}.\end{aligned}$$

1-4. 与γ函数有关的某些無窮和

道格尔公式

(1) $$s=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(d+n)}$$

$$=\pi^2\csc(\pi a)\csc(\pi b)\frac{\Gamma(c+d-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)\Gamma(c-b)\Gamma(d-b)}$$

$\mathrm{Re}(a+b-c-d)<-1$, a, b 非整数，

这个公式的証明如下：

級数 s 顯然是下列函数

$f(z)=\pi\operatorname{ctn}(\pi z)\Gamma(a+z)\Gamma(b+z)/[\Gamma(c+z)\Gamma(d+z)]$

在 $\operatorname{ctn}(\pi z)$ 的極 $z=0, \pm1, \pm2, \cdots$ 上的留数。对于大的 $|z|$，1-8(4)式及 1-2(5)式表明

$$\Gamma(a+z)\Gamma(b+z)/[\Gamma(c+z)\Gamma(d+z)]$$

当 $-\pi<\arg z<\pi$ 时可以 $z^{a+b-c-d}$ 漸近地表示，而当 $-\pi<\arg(-z)<\pi$ 时，則可以

$$(-z)^{a+b-c-d}\frac{\sin[\pi(z+c)]\sin[\pi(z+d)]}{\sin[\pi(z+a)]\sin[\pi(z+b)]}.$$

漸近地表示。

我們可以任意大的半徑 r 在 z 平面上作一个圓，捨去 $\sin[\pi(z+a)]$ 或 $\sin[\pi(z+b)]$ 或 $\sin(\pi z)$ 的所有零点。在这个圓上，

$$\sin(\pi z+\pi c)\sin(\pi z+\pi d)\csc(\pi z+\pi a)\csc(\pi z+\pi b)\operatorname{ctn}(\pi z)$$

是有界的，其界值不依賴于 r。又沿着圓周的積分

$$\int|z^{a+b-c-d}|dz,\qquad \mathrm{Re}(a+b-c-d)<-1.$$

在 r 增大时趋向于 0。在这种情况下 $f(z)$ 的所有留数之和为零。因而

$$s=-[\Gamma(z+a)\text{ 及 }\Gamma(z+b)\text{ 極的留数之和}].$$

$f(z)$ 在極 $z=-(a+m)(m=0,1,2)$ 上的留数为

$$-\pi(-1)^m(m!)^{-1}\operatorname{ctn}(\pi a)\frac{\Gamma(b-a-m)}{\Gamma(c-a-m)\Gamma(d-a-m)},$$

根据高斯公式 2-1(14)，可知 $\Gamma(z+a)$ 極上的留数之和为

$$-\pi\operatorname{ctn}(\pi a)\cdot\frac{\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)}\ {}_2F\ (a-c+1,\ a-d+1;a-b+1;1)$$

$$=\frac{\pi^2\operatorname{ctn}(\pi a)}{\sin[\pi(a-b)]}\cdot\frac{\Gamma(c+d-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)\Gamma(c-b)\Gamma(d-b)}.$$

要求得 $\Gamma(b+z)$ 極上的留数之和，只要把 a, b 两数互换卽可，而这两个式子的和就是式(1)。

將 1-5(1) 式中的被積函数展开为冪級数而后逐項積分，就可很容易地得出公式：

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{y-1}{n}(x+n)^{-1}=\Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)=B(x,y).$$

此外，我們还有下面二个公式(这些公式在第二章第四節中証明)：

(3) $$\sum_{n=0}^{\infty}\{(a)_n(b)_n/[(1-b+a)_n n!]\}\{(\tfrac{1}{2}a+n-z)^{-1}+(\tfrac{1}{2}a+n+z)^{-1}\}$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}a-z)\Gamma(\frac{1}{2}a+z)}{\Gamma(1-b+\frac{1}{2}a-z)\Gamma(1-b+\frac{1}{2}a+z)}\cdot\frac{\Gamma(1-b+a)\Gamma(1-b)}{\Gamma(a)}$$

$\operatorname{Re} b<1,$

(4) $$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}a+z)\Gamma(\frac{1}{2}a-z)}{\Gamma(c-\frac{1}{2}a+z)\Gamma(1-b+\frac{1}{2}a-z)}$$

$$=\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)\Gamma(1-b)}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n\cdot(b)_n}{(c)_n n!}\cdot(\tfrac{1}{2}a+n-z)^{-1}$$

$$+\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(c-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(1-c+a)_n}{(1-b+a)_n n!}\cdot(\tfrac{1}{2}a+n+z)^{-1}$$

$\operatorname{Re}(a+b-c)<1.$

1-5. β 函数

β 函数由下面的積分來定义：

(1) $$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt\qquad \operatorname{Re}x>0,\ \operatorname{Re}y>0.$$

作代换 $t=v/(1+v)$，可得关系式

(2) $$B(x,y)=\int_0^{\infty}v^{x-1}(1+v)^{-x-y}\,dv\qquad \operatorname{Re}x>0,\ \operatorname{Re}y>0.$$

由这一式可推出

(3) $B(x, y)=\int_0^1 (v^{x-1}+v^{y-1})(1+v)^{-x-y} dv$, $\operatorname{Re} x>0$, $\operatorname{Re} y>0$.

由此可知

(4) $B(x, y)=B(y, x)$.

如果以 v^{x-1} 乘下式[見 1-1(4)]

$$\int_0^{\infty} e^{-(1+v)t} t^{x+y-1} dt=\frac{\Gamma(x+y)}{(1+v)^{x+y}},$$

并在 0 与 ∞ 区間内对 v 積分，將積分的次序顚倒一下，就可得到以 γ 函数表示的 β 函数的表达式:

$$\int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} e^{-t(v+1)} t^{x+y-1} v^{x-1} dv=\Gamma(x+y) \int_0^{\infty} v^{x-1}(1+v)^{-x-y} dv.$$

或

(5) $B(x, y)=\dfrac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

下面关于 β 函数的函数方程可以很容易地从(4)及(5)式導出(見 1-2 節):

(6) $B(x, y+1)=(y / x) B(x+1, y)=[y /(x+y)] B(x, y)$,

(7) $B(x, y) B(x+y, z)=B(y, z) B(y+z, x)=B(z, x) B(x+z, y)$,

(8) $B(x, y) B(x+y, z) B(x+y+z, u)=\dfrac{\Gamma(x) \Gamma(y) \Gamma(z) \Gamma(u)}{\Gamma(x+y+z+u)}$,

(9) $\dfrac{1}{B(n, m)}=m\dbinom{n+m-1}{n-1}=n\dbinom{n+m-1}{m-1}$, n, m 为正整数.

1-5.1. 可以 β 函数來表示的定積分

像下面的一些定積分，通过適当的变换，可以表成 β 函数式:

(10) $B(x, y)=2^{1-x-y} \int_0^1 [(1+t)^{x-1}(1-t)^{y-1}$
$+(1+t)^{y-1}(1-t)^{x-1}] dt$, $\operatorname{Re} x>0$, $\operatorname{Re} y>0$,

(11) $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1+b t)^{-x-y} dt=(1+b)^{-x} B(x, y)$,
$b>-1$, $\operatorname{Re} x>0$, $\operatorname{Re} y>0$.

(12) $\int_0^\infty t^{x-1}(1+bt)^{-x-y}dt=b^{-x}B(x,y)$,

$b>0$, $\mathrm{Re}\,x>0$, $\mathrm{Re}\,y>0$.

(13) $\int_b^a (t-b)^{x-1}(a-t)^{y-1}dt=(a-b)^{x+y-1}B(x,y)$,

$\mathrm{Re}\,x>0$, $\mathrm{Re}\,y>0$, $b<a$.

(14) $\int_b^a \frac{(t-b)^{x-1}(a-t)^{y-1}}{(t-c)^{x+y}}dt=\frac{(a-b)^{x+y-1}}{(a-c)^x(b-c)^y}B(x,y)$,

$\mathrm{Re}\,x>0$, $\mathrm{Re}\,y>0$, $c<b<a$.

(15) $\int_b^a \frac{(t-b)^{x-1}(a-t)^{y-1}}{(c-t)^{x+y}}dt=\frac{(a-b)^{x+y-1}}{(c-a)^x(c-b)^y}B(x,y)$,

$\mathrm{Re}\,x>0$, $\mathrm{Re}\,y>0$, $b<a<c$.

(16) $\int_0^\infty (1+bt^z)^{-y}t^x dt=z^{-1}b^{-(x+1)/z}B[(x+1)/z,\ y-(x+1)/z]$,

$z>0$, $b>0$, $0<\mathrm{Re}\,[(x+1)/z]<\mathrm{Re}\,y$.

(17) $\int_0^1 t^{x-1}(1-t^z)^{y-1}dt=z^{-1}B(xz^{-1},y)$,

$z>0$, $\mathrm{Re}\,y>0$, $\mathrm{Re}\,x>0$.

(18) $\int_{-1}^1 (1+t)^{2x-1}(1-t)^{2y-1}(1+t^2)^{-x-y}dt=2^{x+y-2}B(x,y)$,

$\mathrm{Re}\,x>0$, $\mathrm{Re}\,y>0$.

代入三角函数及双曲綫函数以后，可得到一系列含有三角函数及双曲綫函数的積分式：

(19) $\int_0^{1/2\pi} (\sin t)^{2x-1}(\cos t)^{2y-1}dt=\frac{1}{2}B(x,y)$, $\mathrm{Re}\,x>0$, $\mathrm{Re}\,y>0$.

(20) $\int_0^{1/2\pi} \frac{(\sin t)^{2x-1}(\cos t)^{2y-1}}{(1+b\sin^2 t)^{x+y}}dt=\frac{1}{2}(1+b)^{-x}B(x,y)$,

$\mathrm{Re}\,x>0$, $\mathrm{Re}\,y>0$, $b>-1$.

(21) $\int_0^{1/2\pi} \frac{(\sin t)^{2x-1}(\cos t)^{2y-1}}{(\cos^2 t+b\sin^2 t)^{x+y}}dt=\frac{1}{2}b^{-x}B(x,y)$,

$\mathrm{Re}\,x>0$, $\mathrm{Re}\,y>0$, $b>0$.

(22) $\int_0^\infty \mathrm{ch}\,t(\mathrm{sh}\,t)^{2x-1}(1+b\,\mathrm{sh}^2 t)^{-x-y}dt=\frac{1}{2}b^{-x}B(x,y)$,

$\mathrm{Re}\,x>0$, $\mathrm{Re}\,y>0$, $b>0$

(23) $\int_0^\infty (\operatorname{sh} t)^\alpha (\operatorname{ch} t)^{-\beta} dt = \frac{1}{2} B(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\alpha)$,

$\operatorname{Re} \alpha > -1$, $\operatorname{Re} (\alpha - \beta) < 0$.

(24) $\int_0^\infty e^{-xt} (1 - e^{-tz})^{y-1} dt = z^{-1} B(x/z, y)$,

$\operatorname{Re} x/z > 0$, $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} y > 0$.

(25) $\int_0^\infty e^{-\alpha t} [\operatorname{sh} (\beta t)]^\gamma dt = \beta^{-1} 2^{-1-\gamma} B(\frac{1}{2}\alpha/\beta - \frac{1}{2}\gamma, 1 + \gamma)$,

$\operatorname{Re} \gamma > -1$, $\operatorname{Re} \beta > 0$, $\operatorname{Re} (\alpha/\beta) > \operatorname{Re} \gamma$.

(26) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} (2\alpha t)}{[\operatorname{ch} (\rho t)]^{2\beta}} dt = 4^{\beta-1} \rho^{-1} B(\beta + \alpha/\rho, \beta - \alpha/\rho)$,

$\operatorname{Re} (\beta \pm \alpha/\rho) > 0$, $\rho > 0$.

(27) $\int_0^\infty \cos (2zt) \operatorname{sech} (\pi t) dt = \frac{1}{2} \operatorname{sech} z$, $\qquad |Im z| < \frac{1}{2}\pi$.

(28) $\int_0^\infty \operatorname{ch} (2zt) \operatorname{sech} (\pi t) dt = \frac{1}{2} \sec z$, $\qquad |\operatorname{Re} z| < \frac{1}{2}\pi$.

公式(27)称为雷門尼強公式.

公式(12), (13), (17), (19) 可由公式(1)導出; (11) 可由(2)導出; (10) 及(26)由(3)導出; (14), (15), (20) 及(21)可由(11)導出; (16), (22) 可由(12)導出; (18)由(16)導出; (24)由(17)導出; (23)由(22)導出; 由(24)可導出(25); 由(26) 可導出 (27) 及(28); 而所有这些公式都可以很容易地通过熟知的代換或引入特殊的参数來導出. 顯然, 公式 (11), (20) 以及公式 (12), (16), (21), (22) 关于 b 的有效范圍可以分别推廣到复平面 b 内的 b 的任何数值, 复平面 b 是假定在实軸的 -1 至 $-\infty$ 以及 0 至 $-\infty$ 之間分别剖割的.

利用复数的積分法我們進一步可將某些三角函数積分式表成 γ 函数. 考察下面的積分:

$$\int_c (z^{-1} - z)^\alpha z^{\beta-1} dz,$$

其中 c 为 $|z| = 1$ 的上部半圓及其直徑所組成的積分圍綫. 这个圍綫在 $z = 0, \pm 1$ 处刻缺, 每一个刻缺的半徑为 ε. 使 ε 趋近于零, 有人得出了下面的結果(見 Nielsen, 1906, p. 158):

(29) $$\int_0^{\pi}(\sin t)^{\alpha}e^{i\beta t}\,dt=\frac{\pi}{2^{\alpha}}\,\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\,e^{i\frac{1}{2}\pi\beta},$$

$\mathrm{Re}\,\alpha>-1.$

如果 c 是由右半平面内 $|z|=1$ 的半圆及連接点 $z=\pm i$ 的直綫所組成的圍綫，其刻鑿在 $z=0,\ \pm i$，并設刻鑿半徑趨近于 0，則估計下式：

$$\int_c (z^{-1}+z)^{\alpha}z^{\beta-1}\,dz,$$

就可得

(30) $$\int_0^{\pi/2}(\cos t)^{\alpha}(\cos\beta t)\,dt=\frac{\pi}{2^{\alpha+1}}\,\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)},$$

$\mathrm{Re}\,\alpha>-1.$

对于其他类似的積分式，可参看 2–4(6) 至 2–4(10).

現在考慮積分

$$\int_c z^{\alpha-1}e^{-cz}\,dz \qquad c>0,$$

其中圍綫 c 由下列部分組成：由 $+\varepsilon$ 至 $+R$ 的实軸，圓 $z=Re^{i\phi}$ 由 $\phi=0$ 至 $\phi=\beta$ $(-\pi/2\leqslant\beta\leqslant\pi/2)$ 的弧，由 $z=Re^{i\beta}$ 至 $\varepsilon e^{i\beta}$ 的直綫，圓 $z=\varepsilon e^{i\phi}$ 由 $\phi=\beta$ 至 $\phi=0$ 的弧. 由于圍綫積分的值等于零，因而使 $\varepsilon\to 0$, $R\to\infty$，可得

(31) $$\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-ct\cos\beta-ict\sin\beta}\,dt=\Gamma(\alpha)c^{-\alpha}e^{-i\alpha\beta}$$

$-\frac{1}{2}\pi<\beta<\frac{1}{2}\pi$, $\mathrm{Re}\,\alpha>0$ 或 $\beta=\pm\pi/2$, $0<\mathrm{Re}\,\alpha<1.$

設 $p=c\cos\beta$, $q=c\sin\beta$, 則

(32) $$\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-pt-iqt}\,dt=\Gamma(\alpha)(p^2+q^2)^{-\frac{1}{2}\alpha}e^{-i\alpha\tan^{-1}(q/p)},$$

$p>0$, $\mathrm{Re}\,\alpha>0$ 或 $p=0$, $0<\mathrm{Re}\,\alpha<1.$

設 $p+iq=s$, $\tan^{-1}(q/p)=\arg s$, 則

(33) $$\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-st}\,dt=\Gamma(\alpha)s^{-\alpha},$$

$\mathrm{Re}\,\alpha>0$, $\mathrm{Re}\,s>0$ 或 $\mathrm{Re}\,s=0$, $0<\mathrm{Re}\,\alpha<1,$

因而可得更一般的表达式：

(34) $$\int_0^{\infty e^{i\delta}} t^{\alpha-1}e^{-st}\,dt=\Gamma(\alpha)s^{-\alpha},$$

$$\operatorname{Re}\alpha>0,\quad -\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)<\arg s<\frac{\pi}{2}-\delta.$$

有人从(32)式得

(35) $$\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-ct\cos\beta}\cos(ct\sin\beta)\,dt=\Gamma(\alpha)c^{-\alpha}\cos(\alpha\beta),$$

$$c>0,\quad \operatorname{Re}\alpha>0,\quad -\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2},$$

(36) $$\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-ct\cos\beta}\sin(ct\sin\beta)\,dt=\Gamma(\alpha)c^{-\alpha}\sin(\alpha\beta),$$

$$c>0,\quad \operatorname{Re}\alpha>-1,\quad -\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}.$$

如果 β 趋近于 $\frac{\pi}{2}$，而 c 大于 0，则

(37) $$\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}\cos(ct)\,dt=c^{-\alpha}\Gamma(\alpha)\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\alpha\right),\qquad 0<\operatorname{Re}\alpha<1,$$

(38) $$\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}\sin(ct)\,dt=c^{-\alpha}\Gamma(\alpha)\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\alpha\right),\qquad -1<\operatorname{Re}\alpha<1.$$

不僅如此，更有人得出了下面的式子：

(39) $$\int_0^{\infty}\cos(\alpha t^p)\,dt=(p\alpha^{1/p})^{-1}\Gamma(1/p)\cos[\pi(2p)^{-1}],$$

$$\alpha>0,\quad p>1,$$

(40) $$\int_0^{\infty}\sin(\alpha t^p)\,dt=(p\alpha^{1/p})^{-1}\Gamma(1/p)\sin[\pi(2p)^{-1}].$$

1-6. 表示为圍綫積分的 γ 及 β 函数

我們用符号 $\int_{\zeta}^{(0+)} f(t)\,dt$ 來表示沿着圍綫 c 的積分，这个圍綫 c 由一点 ζ 开始，以逆时針方向圍繞原点一圈后重新回到起点，被積函数的全部奇点除 $t=0$ 外均在圍綫 c 之外．

考慮積分 $\int_{-\infty}^{(0+)} e^t t^{-z}\,dt$，其中 $\arg t$ 的最初数值及最終数值分别为 $-\pi$ 及 $+\pi$．使圍綫 c 由 $-\infty$ 至 $-\rho$ 的割綫的下部边界，圍

$t=\rho e^{i\varphi}(-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi)$，$-\rho$ 至 $-\infty$ 的割綫的上部边界所組成，則

$$\int_{-\infty}^{(0+)} e^t t^{-z} dt = 2i\sin(\pi z)\int_\rho^\infty e^{-v} v^{-z} dv + I,$$

其中 I 代表沿圓周 $|t|=\rho$ 的積分．只要 $Re\,z<1$，I 与 ρ 趋近于 0，因而根据 1-1(1)，可得

(1) $$\int_{-\infty}^{(0+)} e^t t^{-z} dt = 2i\sin(\pi z)\Gamma(1-z).$$

或根据 1-2(6)，可得亨克尔表示式：

(2) $$1/\Gamma(z) = 1/(2\pi i)\int_{-\infty}^{(0+)} e^t t^{-z} dt, \qquad |\arg t|\leqslant\pi.$$

由于上式的两边都表示 z 的整函数，故知上式对 z 的全部数值都是正确的．

在(1)式中如以 $1-z$ 代 z，得

(3) $$2i\sin(\pi z)\Gamma(z) = \int_{-\infty}^{(0+)} e^t t^{z-1} dt, \qquad |\arg t|\leqslant\pi.$$

方程(3)又可寫成

(4) $$2i\sin(\pi z)\Gamma(z) = -\int_{\infty}^{(0+)} (-t)^{z-1} e^{-t} dt, \quad |\arg(-t)|\leqslant\pi.$$

同理，如果考慮圍綫積分

$$\int_{\infty\exp i\delta}^{(0+)} t^{s-1} e^{-\zeta t} dt,$$

則借助于 1-5(34) 可得出一个更普遍的表达式．現在我們取 $\arg t$ 的最初及最終数值为 δ 及 $2\pi+\delta$．于是得

(5) $$\Gamma(s) = \zeta^s(e^{2\pi i s}-1)^{-1}\int_{\infty\exp i\delta}^{(0+)} t^{s-1} e^{-t\zeta} dt.$$

$$-\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)<\arg\zeta<\frac{\pi}{2}-\delta,\ \delta\leqslant\arg t\leqslant 2\pi+\delta,\ s\neq 0,\ \pm1,\ \pm2\cdots$$

或者，以 $1-s$ 代 s，并利用 1-2(6)，得

(6) $$2\pi i(\zeta e^{-i\pi})^{s-1}/\Gamma(s) = \int_{\infty\exp i\delta}^{(0+)} t^{-s} e^{-t\zeta} dt$$

$$-\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)<\arg\zeta<\frac{\pi}{2}-\delta,\ \delta\leqslant\arg t\leqslant 2\pi+\delta,$$

上式对 s 所有的值都正确．

最后，考慮沿閉圍綫的積分式

$$\int_C t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\int_{\gamma} f(t)\,dt,$$

閉圍綫从实 t 軸 0 与 1 之間的一点 A 开始，由圍繞 $t=1$ 的正向迴綫，圍繞 $t=0$ 的正向迴綫，及圍繞 $t=1$ 及 $t=0$ 的負向迴綫所組成，因而 $f(t)$ 以最初数值回到 A 点，这个最初数值为正实数，且在幅角等于 0 的时候取定．規定圍繞 1 的迴綫使包括：自 A 至 $1-\rho$ 的直綫，小圓 $|t-1|=\rho$，自 $1-\rho$ 至 A 的直綫，对于其他的迴綫也作类似的規定．令 $\rho\to 0$，則

$$\int^{(1+,0+,1-,0-)} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=(1-e^{2\pi ix})(1-e^{2\pi iy})B(x,y),$$

$$\mathrm{Re}\,x>0,\ \mathrm{Re}\,y>0.$$

因此

$$(7)\quad B(x,y)=\frac{-e^{-i\pi(x+y)}}{4\sin(\pi x)\sin(\pi y)}\int^{(1+,0+,1-,0-)} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

根據解析开拓定理可知，最初根据 $\mathrm{Re}\,x>0$，$\mathrm{Re}\,y>0$，及 x，y 不是整数的条件導出的上面这个公式，应該对 x，y 的一切非整数都成立．这个公式系由波奇亨牟所導出．

同理，$B(x,y)$ 亦可以表示为一个單迴綫積分：

$$(8)\qquad B(x,y)=\tfrac{1}{2}\operatorname{csch}(\pi iy)\int_0^{(1+)} t^{x-1}(t-1)^{y-1}dt,$$

$$Re\,x>0,\ |\arg(t-1)|\leqslant\pi,\ y\neq 0,\ \pm1,\ \pm2\cdots$$

$$(9)\qquad B(x,y)=-\tfrac{1}{2}\operatorname{csch}(\pi ix)\int_1^{(0+)}(-t)^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,$$

$$\mathrm{Re}\,y>0,\ |\arg(-t)|\leqslant\pi,\ x\neq 0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$$

1-7. ψ 函数

函数 $\psi(z)$ 为 γ 函数的对数微商：

$$(1)\qquad \psi(z)=\frac{d\ln\Gamma(z)}{dz}=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\ \text{或}\ \ln\Gamma(z)=\int_1^z\psi(z)\,dz.$$

由 1-1(2) 及 1-1(3) 式可得下面的表示式：

$$(2)\qquad \psi(z)=\lim_{n\to\infty}\left[\ln n-\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}-\cdots-\frac{1}{z+n}\right].$$

(3) $$\psi(z) = -\gamma - (1/z) + \sum_{n=1}^{\infty} z/[n(z+n)]$$

$$= -\gamma + (z-1)\sum_{n=0}^{\infty} 1/[(n+1)(z+n)].$$

ψ 函数是在 $z=0, -1, -2\cdots$ 上具有單極的半純函数.

顯然

(4) $$\psi(1) = -\gamma.$$

由 1–3(2)式,設 $u=z$, $v=1$, 得

(5) $$\ln\frac{\Gamma(1+z)}{\Gamma(z)} = \ln z = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty}\{(n+1)^{-1} - \ln[1+1/(n+z)]\}.$$

由式(3)及(5)

(6) $$\psi(z) = \ln z - \sum_{n=0}^{\infty}\{(n+z)^{-1} - \ln[1+1/(n+z)]\}.$$

由式(6)及 1–1(1) 式,

(7) $$\gamma = -\psi(1) = \sum_{n=1}^{\infty}[n^{-1} - \ln(1+n^{-1})] = -\int_0^{\infty} e^{-t}\ln t\,dt.$$

1–7–1. $\psi(z)$ 的函数方程

由 1–2(1), 1–2(2), 1–2(6) 及 1–2(11), 我們有

(8) $$\psi(z) = \psi(1+z) - 1/z,$$

(9) $$\psi(1+n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \gamma,$$

(10) $$\psi(z+n) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \cdots + \frac{1}{z+n-1} + \psi(z),\quad n=1, 2, 3\cdots,$$

(11) $$\psi(z) - \psi(1-z) = -\pi\operatorname{ctn}(\pi z),$$

$$\psi(z) - \psi(-z) = -\pi\operatorname{ctn}(\pi z) - 1/z,$$

$$\psi(1+z) - \psi(1-z) = z^{-1} - \pi\operatorname{ctn}(\pi z),$$

$$\psi(\tfrac{1}{2}+z) - \psi(\tfrac{1}{2}-z) = \pi\tan(\pi z),$$

(12) $$\psi(mz) = m^{-1}\sum_{r=0}^{m-1}\psi(z+r/m) + \ln m.$$

1-7-2. ψ(z) 的積分表示式

公式

(13)　$\psi(z)=-\gamma+\int_0^1(1-t^{z-1})(1-t)^{-1}dt,\qquad \mathrm{Re}\,z>0.$

很容易得到証明，如果將 $(1-t)^{-1}$ 展开为級数，而后逐項積分，并利用公式(3)卽可.

作 $t=e^{-x}$ 的代換，可得

(14)　$\psi(z)=-\gamma+\int_0^\infty(e^{-t}-e^{-tz})(1-e^{-t})^{-1}dt,\qquad \mathrm{Re}\,z>0.$

从而

$$\psi[\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)/b]-\psi[\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)/b]$$
$$=2b\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,\mathrm{sh}\,(\beta t)\,[\mathrm{sh}\,(bt)]^{-1}dt,$$
$$\mathrm{Re}\,(\alpha+b\pm\beta)>0.$$

由公式(11)可得一对 $\mathrm{Re}\,z<1$ 成立的公式:

(15)　$\psi(z)=-\gamma-\pi\,\mathrm{ctn}\,(\pi z)+\int_0^1(1-t^{-z})(1-t)^{-1}dt,\quad \mathrm{Re}\,z<1.$

或

(16)　$\psi(z)=-\gamma-\pi\,\mathrm{ctn}\,(\pi z)+\int_0^\infty(1-e^{tz})(e^t-1)^{-1}dt,\quad \mathrm{Re}\,z<1.$

下面的公式称为高斯積分公式:

(17)　$\psi(z)=\int_0^\infty[t^{-1}e^{-t}-(1-e^{-t})^{-1}e^{-tz}]\,dt,\qquad \mathrm{Re}\,z>0.$

它可以用如下方法來証明. 下式中

$$x^{-1}=\int_0^\infty e^{-xt}dt,$$

由 1 至 n 对 x 積分，得

(18)　$\ln n=\int_0^\infty(e^{-t}-e^{-nt})t^{-1}dt.$

將上式及 $1/(z+m)=\int_0^\infty e^{-(m+z)t}dt$ 代入(2)，得

$$\psi(z)=\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^\infty[(e^{-t}-e^{-nt})t^{-1}-e^{-tz}-e^{-t(z+1)}-\cdots-e^{-t(z+n)}]dt\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^\infty [t^{-1}e^{-t}-(1-e^{-t})^{-1}e^{-tz}]\,dt\right.$$

$$\left.-\int_0^\infty e^{-nt}[t^{-1}-(1-e^{-t})^{-1}e^{-t(z+1)}]\,dt\right\}.$$

上式中第一个積分不依賴于 n，第二个積分在 $n\to\infty$ 时趋近于0. 这就証明了公式(17).

在式(17)中取 $z=1$, 可得欧拉常数的積分公式:

(19) $$\gamma=\int_0^\infty [(1-e^{-t})^{-1}-t^{-1}]\,e^{-t}\,dt.$$

設 $t=\ln(1+x)$, $\delta=\ln(1+\Delta)$, 則由(17), 可得

$$\psi(z)=\lim_{\delta\to 0}\int_\delta^\infty [t^{-1}e^{-t}-(1-e^{-t})^{-1}e^{-zt}]\,dt$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\int_\delta^{e^\delta-1} t^{-1}e^{-t}\,dt+\lim_{\Delta\to 0}\int_\Delta^\infty [e^{-x}-(1+x)^{-z}]x^{-1}\,dx.$$

由于第一个極限为零，这就給出了狄里克雷公式:

(20) $$\psi(z)=\int_0^\infty [e^{-t}-(1+t)^{-z}]t^{-1}\,dt,\qquad \operatorname{Re} z>0.$$

又

(21) $$\gamma=-\psi(1)=-\int_0^\infty [e^{-t}-(1+t)^{-1}]t^{-1}\,dt$$

$$=-\int_0^\infty [\cos t-(1+t^2)^{-1}]\,t^{-1}\,dt.$$

上式的第一个積分式可由公式(20)推出，第二个積分式可以將 $t^{-1}e^{-t}-t^{-1}(1+t)^{-1}$ 沿一个剗鑿于原点的圓周的一个象限進行積分而推出，这里，原点就是这个圓的圓心.

由式(20)及(21)可得

$$\psi(z)=-\gamma+\int_0^\infty [(1+t)^{-1}-(1+t)^{-z}]\,t^{-1}\,dt,\qquad \operatorname{Re} z>0.$$

下面的自納脫表达式，都可以很容易地从式(17)及式(18)推出:

(22) $$\psi(z)=\ln z+\int_0^\infty [t^{-1}-(1-e^{-t})^{-1}]e^{-tz}\,dt,\qquad \operatorname{Re} z>0.$$

(23) $$\psi(z)=\ln z-\tfrac{1}{2}z^{-1}-\int_0^\infty [(1-e^{-t})^{-1}-t^{-1}-\tfrac{1}{2}]\,e^{-tz}\,dt.$$

$$\operatorname{Re} z>0.$$

(24)　$\psi(z)=\ln z+\int_0^\infty[(1-e^t)^{-1}+t^{-1}-1]e^{-tz}dt,\quad \operatorname{Re} z>0.$

(25)　$\psi(z)=\ln z-\frac{1}{2}z^{-1}-\int_0^\infty[(e^t-1)^{-1}-t^{-1}+\frac{1}{2}]e^{-tz}dt,$

$\operatorname{Re} z>0.$

將下面一式

$$[(e^t-1)^{-1}-t^{-1}+\tfrac{1}{2}]e^{-tz}$$

沿刻鑿于原点的扇形進行積分，由公式(25)就可以導出下面更普遍的表达式：

(26)　$\psi(z)=\ln z-\frac{1}{2}z^{-1}-\int_0^{\infty e^{i\beta}}[(e^t-1)^{-1}-t^{-1}+\frac{1}{2}]e^{-tz}dt,$

$$-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2},\quad -\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)<\arg z<\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right).$$

其推導与1-5(31)式的推導相似.

由1-9(9)式可得

(27)　$\psi(z)=\dfrac{d\ln\Gamma(z)}{dz}$

$$=\ln z-\frac{1}{2}z^{-1}-2\int_0^\infty(t^2+z^2)^{-1}(e^{2\pi t}-1)^{-1}t\,dt,$$

$\operatorname{Re} z>0,$

这个式子也是白納脫所導出. 因而

(28)　$\gamma=-\psi(1)=\frac{1}{2}+2\int_0^\infty(t^2+1)^{-1}(e^{2\pi t}-1)^{-1}t\,dt.$

1-7-3. 高斯定理

在(13)式中，設 $z=p/q$, $0<p<q$, p 及 q 皆为整数，并設 $t=v^q$，則

$$\psi(p/q)=-\gamma+\int_0^1 R(v)dv;\quad R(v)=q(v^{p-1}-v^{q-1})(v^q-1)^{-1}.$$

因

$$v^q-1=(v-1)\sum_{n=1}^{q-1}[v-\exp(2\pi in/q)],$$

故可將 $R(v)$ 分解为部分分式:

$$R(v)=\sum_{n=1}^{q-1}[\exp(2\pi ipn/q)-1][v-\exp(2\pi in/q)]^{-1}$$

引入 $R(v)$ 并積分，就可以証明下式 (Böhmer 1939, p. 77).

(29) $$\psi(p/q)=-\gamma-\ln q-\pi/2\operatorname{ctn}(\pi p/q)+\sum_{n=1}^{<\frac{1}{2}q}{}'\cos(2\pi pn/q)\ln[2-2\cos(2\pi n/q)].$$

Σ 号上部的一撇說明在 q 为偶数时和数中只取后面一式的一半. 由此可知对于一个正的眞分式 z, $\psi(z)$ 的值可以用初等函数的有限組合來表示. 应用公式 (10)，这一結果可以推廣到 z 的每一个有理数. 这就是高斯定理.

1-7-4. 与 ψ 函数有关的一些無窮級数

如果我們定义

$$\Delta f(z)=f(z+1)-f(z),\ \Delta^n f(z)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}f(z+n-m)(-1)^m,$$

則由 1-7(8)式,有

$$\Delta\psi(\alpha+z)=1/(\alpha+z),$$

因而可得

$$\Delta^2\psi(\alpha+z)=\Delta[1/(\alpha+z)]=-1/[(\alpha+z)(\alpha+z+1)].$$

且

$$\Delta^n\psi(\alpha+z)=\Delta^{n-1}[1/(\alpha+z)]$$
$$=(-1)^{n-1}(n-1)!/[(\alpha+z)(\alpha+z+1)\cdots(\alpha+z+n-1)].$$

故知 $\psi(\alpha+z)$ 展成的階乘級数在 $Re(\alpha+z)>0$、α 为非負整数时收斂，且具有如下形式: (Nörlund 1924, p. 261).

(30) $$\psi(\alpha+z)=\psi(\alpha)+\frac{z}{\alpha}-\frac{1}{2}\,\frac{z(z-1)}{\alpha(\alpha+1)}+\frac{1}{3}\cdot\frac{z(z-1)(z-2)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}-\cdots.$$

函数方程 1-7(10)在某些級数的求和中很有用，例如:

(31) $$\sum_{m=0}^{n}(a+mb)^{-1}=b^{-1}\sum_{m=0}^{n}(m+a/b)^{-1}$$
$$=b^{-1}[\psi(n+1+a/b)-\psi(a/b)],$$

$$(32)\quad \frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+2b}+\cdots-\frac{1}{a+2nb}=\frac{1}{4b}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{a-b}{2b}+m\right)^{-1}\left(\frac{a}{2b}+m\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{2}b^{-1}\left[\psi\left(\frac{a}{2b}+n+\frac{1}{2}\right)-\psi\left(\frac{a}{2b}+\frac{1}{2}\right)-\psi\left(\frac{a}{2b}+n+1\right)\right.$$

$$\left.+\psi\left(\frac{a}{2b}+1\right)\right],$$

如 $n\to\infty$，則

$$(33)\quad \frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{a+3b}-\cdots=\frac{1}{2}b^{-1}\left[\psi\left(1+\frac{1}{2}ab^{-1}\right)\right.$$

$$\left.-\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}ab^{-1}\right)\right].$$

1-8. 函数 $G(z)$

函数 $G(z)$ 定义为

$$(1)\quad G(z)=\psi(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}z)-\psi(\tfrac{1}{2}z).$$

由 1-7(13) 式及 1-7(14) 式，有

$$(2)\quad G(z)=2\int_0^1 t^{z-1}(1+t)^{-1}\,dt,\qquad \operatorname{Re} z>0.$$

$$(3)\quad G(z)=2\int_0^\infty e^{-zt}(1+e^{-t})e^{-1}\,dt,\qquad \operatorname{Re} z>0.$$

用導出 1-5(31) 式的同样方法將 $\int_c e^{-zt}(1+e^{-t})^{-1}dt$ 的研究推廣至整个的圍道，就可得出下面的更普遍的表示式：

$$(4)\quad G(z)=2\int_0^{\infty e^{i\beta}} e^{-zt}(1+e^{-t})^{-1}\,dt,$$

$$-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2},\quad -\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)<\arg z<\frac{\pi}{2}-\beta.$$

或

$$(5)\quad G(z)=z^{-1}+\int_0^{\infty e^{i\beta}}\tanh(\tfrac{1}{2}t)e^{-zt}\,dt,$$

$$-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2},\quad -\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)<\arg z<\frac{\pi}{2}-\beta.$$

如果將 (2) 式中的 $(1+t)^{-1}$ 展开，并逐項積分，則可得

(6) $$G(z)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+n)^{-1}=2z^{-1}{}_2F_1(1,z;1+z;-1).$$

利用式(1)并联系 1-7(1)式，可得如下的函数方程：

(7) $$G(1+z)=2z^{-1}-G(z),$$

(8) $$G(1-z)=2\pi\csc(\pi z)-G(z),$$

(9) $$G(mz)=-\left(\frac{2}{m}\right)\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r\psi\left(z+\frac{r}{m}\right),\qquad m \text{ 偶数}.$$

(10) $$G(mz)=\left(\frac{1}{m}\right)\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r\psi\left(z+\frac{r}{m}\right),\qquad m \text{ 奇数}.$$

1-9. 函数 $\ln\Gamma(z)$ 的表达式

由 1-7(17) 式可得麦尔司頓公式

(1) $$\ln\Gamma(z)=\int_1^z\psi(z)dz=\int_0^\infty\left[(z-1)-\frac{1-e^{-(z-1)t}}{1-e^{-t}}\right]\frac{e^{-t}}{t}dt,\qquad Re\, z>0.$$

又由 1-7(25) 式

(2) $$\ln\Gamma(z)=(z-\tfrac{1}{2})\ln z-z+1+\int_0^\infty[(e^t-1)^{-1}-t^{-1}+\tfrac{1}{2}](e^{-tz}-e^{-t})t^{-1}dt,\qquad \mathrm{Re}\, z>0.$$

因为 (Whittaker-Watson, 1927, p. 249)

(3) $$\int_0^\infty[\tfrac{1}{2}-t^{-1}+(e^t-1)^{-1}]t^{-1}e^{-t}dt=1-\tfrac{1}{2}\ln(2\pi),$$

故可得 $\ln\Gamma(z)$ 的白納脱第一表达式，

(4) $$\ln\Gamma(z)=(z-\tfrac{1}{2})\ln z-z+\tfrac{1}{2}\ln(2\pi)+\int_0^\infty[(e^t-1)^{-1}-t^{-1}+\tfrac{1}{2}]t^{-1}e^{-tz}dt,\qquad \mathrm{Re}\, z>0$$

或，更普遍的为[見 1-5(1)式，1-7(25)，1-7(26)式]

(5) $$\ln\Gamma(z)=(z-\tfrac{1}{2})\ln z-z+\tfrac{1}{2}\ln(2\pi)+\int_0^{\infty e^{i\beta}}[(e^t-1)^{-1}-t^{-1}+\tfrac{1}{2}]t^{-1}e^{-tz}dt,$$
$$-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2},\quad -\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)<\arg z<\frac{\pi}{2}-\beta.$$

由 1-2(6) 式，可得

$$\ln\Gamma(z)=\ln\pi-\ln(\sin\pi z)-\ln\Gamma(1-z).$$

因而

(6) $$\ln\Gamma(z)=\ln\pi-\ln(\sin\pi z)-\int_0^\infty[(e^{zt}-1)(1-e^{-t})^{-1}-z]t^{-1}e^{-t}dt,\qquad \operatorname{Re}z<1.$$

將(1)及(6)相加，得

(7) $$\ln\Gamma(z)=\tfrac{1}{2}\ln\pi-\tfrac{1}{2}\ln(\sin\pi z)+\tfrac{1}{2}\int_0^\infty\{\operatorname{sh}[(\tfrac{1}{2}-z)t]\operatorname{csch}(t/2)-(1-2z)e^{-t}\}t^{-1}dt,$$
$$0<\operatorname{Re}z<1.$$

因为对于 $0\leqslant t<\infty$，有 $|[\frac{1}{2}-t^{-1}+(e^t-1)^{-1}]t^{-1}|\leqslant K$，
故从白納脫第一表达式(4)很容易得出：

(8) $$|\ln\Gamma(z)-(z-\tfrac{1}{2})\ln z+z-\tfrac{1}{2}\ln 2\pi|<K/x\qquad z=x+iy.$$

最后，我們來導出 $\ln\Gamma(z)$ 的白納脫第二表达式

(9) $$\ln\Gamma(z)=(z-\tfrac{1}{2})\ln z-z+\tfrac{1}{2}\ln(2\pi)+2\int_0^\infty\frac{\tan^{-1}(t/z)}{e^{2\pi t}-1}dt,$$
$$\operatorname{Re}z>0.$$

由 1-7(3)式可知

(10) $$\psi'(z)=\frac{d^2\ln\Gamma(z)}{dz^2}=\sum_{n=0}^\infty 1/(z+n)^2.$$

現在我們应用普命那的一个求和公式(Lindelöf, 1906, p. 61)，

(11) $$\sum_{n=0}^\infty f(n)=\tfrac{1}{2}f(0)+\int_0^\infty f(\tau)d\tau+i\int_0^\infty[f(it)-f(-it)](e^{2\pi t}-1)^{-1}dt,$$

这个式子当下面的条件成立时有效，即：

1) $f(\zeta)$ 在 $Re\zeta\geqslant 0$ 时正则 $\quad\zeta=\tau+it$,

2) 对于 $0\leqslant\tau<\infty$, $\lim\limits_{t\to\infty}e^{-2\pi|t|}f(\tau+it)=0$ 一致.

3) $\lim\limits_{\tau\to\infty}\int_{-\infty}^\infty e^{-2\pi|t|}|f(\tau+it)|dt=0.$

在(11)式中取 $f(\zeta)=1/(z+\zeta)^2(\operatorname{Re}z>0)$，則可得

(12) $$\sum_{n=0}^{\infty} 1/(z+n)^2 = \psi'(z) = \tfrac{1}{2}z^{-2} + z^{-1} + \int_0^{\infty} 4tz(t^2+z^2)^{-2}(e^{2\pi t}-1)^{-1}\,dt,$$

从1至z积分两次,得

(13) $$\ln \Gamma(z) = (z-\tfrac{1}{2})\ln z + z(A-1) + B + 2\int_0^{\infty} (e^{2\pi t}-1)^{-1}\tan^{-1}(t/z)\,dt,$$

其中A及B为积分常数．为了确定这两个常数,注意：当$x\geqslant 0$时,有$0\leqslant \tan^{-1}x\leqslant x$,因而对正实数$z$,

$$|\ln\Gamma(z)-(z-\tfrac{1}{2})\ln z-(A-1)z-B| < (2/z)\int_0^{\infty}(e^{2\pi t}-1)^{-1}t\,dt.$$

式子的右边部分当z取正实数值趋向于∞时趋于零,因此与(8)式比较一下就立刻可知$A=0$, $B=\frac{1}{2}\ln(2\pi)$．这就証明了公式(9).

1-9-1. $\ln\Gamma(z)$的康曼尔級数

函数$\ln\Gamma(x)$, $0<x<1$,可以展开为富里哀級数．我們应用熟知的富里哀展开式(Bromwich, 1947. pp. 356, 393, 370):

$$\ln(\sin \pi x) = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}(1/n)\cos(2\pi n x),$$

$$\operatorname{csch}(t/2)\operatorname{sh}(\tfrac{1}{2}-x)t = 8\pi\sum_{n=1}^{\infty}[n\sin(2\pi n x)]/(t^2+4\pi^2n^2),$$

$$\pi(1-2x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)\sin(2\pi n x).$$

如果在(7)式中設$z=x$,并代入上面这些关系式,計算如下的积分

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{2\pi n}{t^2+4\pi^2n^2}-\frac{e^{-t}}{2m}\right)\frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+t^2}-e^{-2\pi n t}\right)\frac{dt}{t}$$
$$= \frac{1}{2\pi n}\left[\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+t^2}-\cos t\right)\frac{dt}{t} + \int_0^{\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2\pi n t}}{t}\,dt + \int_0^{\infty}(\cos t - e^{-t})\frac{dt}{t}\right],$$

根据1-7(21)及1-7(18)式可知它等于$(2\pi n)^{-1}[\gamma+\ln(2\pi n)]$,

因为对于第三个積分我們有:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\delta}^{\infty}(\cos t-e^{-t})t^{-1}\,dt=\lim_{\delta\to 0}[Ei(-\delta)-Ci(\delta)]=0.$$

从而可得

(14) $\ln\Gamma(x)=\frac{1}{2}\ln(2\pi)$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[(2n)^{-1}\cos(2\pi nx)+(\gamma+\ln 2\pi n)(\pi n)^{-1}\sin(2\pi nx)],$$

$$\ln\Gamma(x)=(\tfrac{1}{2}-x)(\gamma+\ln 2)+(1-x)\ln\pi-\tfrac{1}{2}\ln(\sin\pi x)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(\pi n)^{-1}\ln n\sin(2\pi nx),\qquad 0<x<1,$$

这就是康曼尔級数.

$\psi(x)$ 的一个类似表示式系由李奇所導出: (Nielsen, 1906, p. 204)

(15) $$\psi(x)\sin(\pi x)=-\frac{\pi}{2}\cos(\pi x)-(\gamma+\ln 2\pi)\sin\pi x$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\sin(2n+1)\pi x,\qquad 0<x<1.$$

由公式(14)可得下列積分公式:

(16) $$\int_0^1\ln\Gamma(x)\sin(2\pi nx)\,dx=\frac{\gamma+\ln(2\pi n)}{2\pi n},\quad n=1,2,3\cdots,$$

(17) $$\int_0^1\ln\Gamma(x)\cos(2\pi nx)\,dx=\frac{1}{4n},\qquad n=1,2,3\cdots,$$

(18) $$\int_0^1\ln\Gamma(x)dx=\tfrac{1}{2}\ln(2\pi).$$

此外,尚有

(19) $$\int_x^{x+1}\ln\Gamma(t)\,dt=x\ln x-x+\tfrac{1}{2}\ln(2\pi).$$

这个公式可用如下方法証明.

由乘法公式 1-2(11), 可得

$$m^{-1}\ln[\Gamma(mx)(2\pi)^{m/2-\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{2}-mx}]=\sum_{r=0}^{m-1}m^{-1}\ln\Gamma(x+r/m).$$

如果現在設 $m\to\infty$, 將 $\Gamma(mx)$ 用它的漸近式 1-18(1) 代替,并注意:

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{r=0}^{m-1} m^{-1}\ln\Gamma(x+r/m)=\int_0^1\ln\Gamma(x+y)dy=\int_x^{x+1}\ln\Gamma(t)dt$$

就可得出公式(19).

在(19)式中,以 $x+1,\ x+2,\ x+3\cdots,\ x+n-1$ 分別代 x, 并將所得方程相加,就可得更普遍的公式:

(20) $$\int_x^{x+n}\ln\Gamma(x)dx=x\ln x+(x+1)\ln(x+1)+\cdots$$
$$+(x+n-1)\ln(x+n-1)-nx-\tfrac{1}{2}n(n-1)$$
$$+\tfrac{1}{2}n\ln(2\pi),\qquad n=1,2,3\cdots$$

1-10. 廣义 ζ 函数

对于 $Re\,s>0$, 廣义 ζ 函数可由下面的方程來定义:

(1) $$\zeta(s,v)=\sum_{n=0}^{\infty}(v+n)^{-s},\qquad v\neq 0,\ -1,\ -2,\cdots$$

它滿足于函数方程:

(2) $$y(s,v)=y(s,m+v)+\sum_{n=0}^{n-1}(n+v)^{-s},\qquad m=1,2,3,\cdots$$

由于当 $Re\,s>0$ 及 $Re\,v>0$ 时,从 1-1(5) 式可得

$$(v+n)^{-s}\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-(v+n)t}t^{s-1}dt,$$

由此可得

(3) $$\Gamma(s)\zeta(s,v)=\int_0^\infty t^{s-1}e^{-vt}(1-e^{-t})^{-1}dt$$
$$=\int_0^1 x^{v-1}(1-x)^{-1}(\ln 1/x)^{s-1}dx,\qquad \mathrm{Re}\,s>1,\ \mathrm{Re}\,v>0.$$

考慮積分

$$\int_c t^{s-1}e^{-vt}(1-e^{-t})^{-1}dt$$

沿着一个刻鑿于原点的圓的一扇形的整个圍界進行[見 1-5(1)式],則可得如下更普遍的表示式:

(4) $$\Gamma(s)\zeta(s,v)=\int_0^{\infty e^{i\beta}}t^{s-1}e^{-vt}(1-e^{-t})^{-1}dt,$$

$$Re\,s>1,\ -\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2},\ -\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)<\arg v<\frac{\pi}{2}-\beta.$$

应用 1-6 節的記法可將方程(3)化成閉綫積分，

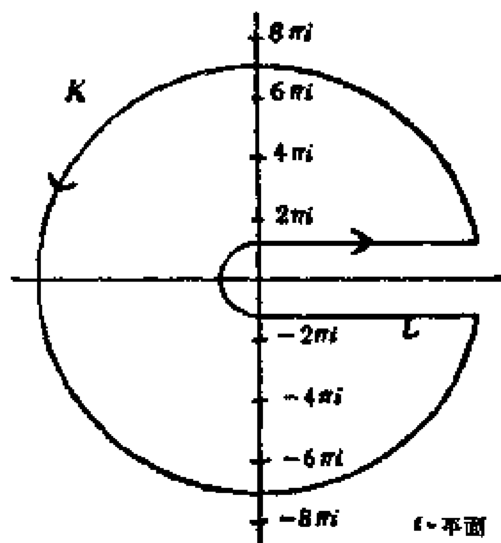
$$(5)\quad 2\pi i\zeta(s,v)=-\Gamma(1-s)\int_{\infty}^{(0+)}(-t)^{s-1}e^{-vt}(1-e^{-t})^{-1}dt,$$

$$Re\, v>0,\quad |\arg(-t)|\leqslant\pi.$$

这个積分給出了一个 $\zeta(s,v)$ 的表示式，它在整个 s 平面内除了点 $s=1,2,3,\cdots$ 外都正确. 由这个式子可導出 $\zeta(s,v)$ 的赫威茲級数表示式. 考慮積分

$$\int_c(-t)^{s-1}e^{-vt}(1-e^{-t})^{-1}dt.$$

沿着一个封閉的圍道 c 進行，c 由点 $t=(2N+1)\pi$ 开始，由一个圓 K 及一条迴綫 L 組成，如圖所示. 圓的半徑为 $(2N+1)\pi$ (N



为整数)，迴綫 L 内並不包含点 $t=\pm2\pi i,\ \pm4\pi i,\ \pm6\pi i,\cdots$ 中的任一点. 在 C 圍住的区域中，式(5)的被積函数，除了在單極 $\pm2\pi i$, $\pm4\pi i,\cdots\pm2N\pi i$ 外都是解析的而且是單值的. 根据留数理論,

$$\int_K\frac{(-t)^{s-1}e^{-vt}}{1-e^{-t}}dt+\int_L\frac{(-t)^{s-1}e^{-vt}}{1-e^{-t}}dt=2\pi i\sum_{n=1}^{N}(R_n+R_n'),$$

式中 R_n 及 R_n' 分别为被積函数在 $2\pi ni$ 及 $-2\pi ni$ 上的留数,

$$R_n=(2n\pi)^{s-1}e^{-i\frac{1}{2}\pi(s-1)}e^{-2n\pi vi},$$

$$R_n'=(2n\pi)^{s-1}e^{i\frac{1}{2}\pi(s-1)}e^{2n\pi vi}.$$

設 $N\to\infty$，則只要 $\mathrm{Re}\,s<0$ 并 $0<v\leqslant1$，沿着 K 的積分趋向于零. 利用公式(5)就可得到赫威兹公式:

(6) $$\zeta(s,v)=2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\sum_{n=1}^{\infty}n^{s-1}\sin\left(2\pi nv+\tfrac{1}{2}\pi s\right),$$

$$\operatorname{Re} s<0,\quad 0<v\leqslant 1.$$

最后，在普命那求和公式 1-9(11) 中，可取 $f(y)=(y+v)^{-s}$，卽得

(7) $$\zeta(s,v)=\frac{1}{2v^{s}}+\frac{v^{1-s}}{s-1}+2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\left[s\tan^{-1}(t/v)\right]}{(v^{2}+t^{2})^{1/2s}}\,\frac{dt}{e^{2\pi t}-1},$$

$$\operatorname{Re} v>0.$$

这就是 $\zeta(s,v)$ 的漢米特表示式.

由式(7)可以看出 $\zeta(s,v)$ 在 s 平面的有限域内只有一个奇点(留数为 1 的一个單極). 此外，我們有：[見 1-7(27)式]

(8) $$\zeta(0,v)=\tfrac{1}{2}-v.$$

(9) $$\lim_{s\to 1}\left[\zeta(s,v)-\frac{1}{s-1}\right]=\frac{1}{2v}-\ln v+2\int_{0}^{\infty}\frac{t}{v^{2}+t^{2}}\,\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}$$
$$=-\psi(v),\qquad \operatorname{Re} v>0.$$

將(7)式对 s 微分，而后令 $s=0$，并应用 1-9(9) 式可得

(10) $$\left[\frac{d\zeta(s,v)}{ds}\right]_{s=0}=\ln\Gamma(v)-\tfrac{1}{2}\ln(2\pi).$$

在 $s=-m\ (m=0,1,2\cdots)$ 的特別情况下，我們有

(11) $$\zeta(-m,v)=-\frac{B_{m+1}(v)}{m+1},$$

其中 $B_r(v)$ 代表柏努利多項式[見 1-13(3) 式]. 要証明这个公式，应注意如果 s 为整数，則(5)式的被積式是 t 的一个單值函数，因而可以应用柯西定理. 如果 $s=-m$, $(m=0,1,2\cdots)$, 則[見 1-13(2) 式]

$$(-t)^{-m-1}\frac{e^{-vt}}{1-e^{-t}}=(-1)^{-m-1}t^{-m-2}\frac{te^{-vt}}{1-e^{-t}}$$
$$=(-1)^{m-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}B_{n}(v)\frac{t^{n-m-2}}{n!}.$$

从而可知被積表达式在 $t=0$ 上的留数为 $\frac{B_{m+1}(v)}{(m+1)!}$，这就証明了公式(11).

1-11. 函数 $\Phi(z, s, v)=\sum_{n=0}^{\infty}(v+n)^{-s}z^{n}$

函数

(1) $\Phi(z, s, v)=\sum_{n=0}^{\infty}(v+n)^{-s}z^{n}, \quad |z|<1,\ v\neq 0, -1, -2, \cdots$

满足方程

(2) $y(z, s, v)=z^{m}y(z, s, m+v)+\sum_{n=0}^{m-1}(v+n)^{-s}z^{n},$

$$m=1, 2, 3, \cdots, \quad v\neq 0, -1, -2, \cdots$$

由于

$$(v+n)^{-s}z^{n}=[1/\Gamma(s)]\int_{0}^{\infty}e^{-vt}t^{s-1}(ze^{-t})^{n}dt,$$

$$\operatorname{Re}v>0, \quad \operatorname{Re}s>0.$$

由 1-1(5) 式,可得如下的积分公式

(3) $\Phi(z, s, v)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{0}^{\infty}\frac{t^{s-1}e^{-vt}}{1-ze^{-t}}dt=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{0}^{\infty}\frac{t^{s-1}e^{-(v-1)t}}{e^{t}-z}dt.$

$\operatorname{Re}v>0$, 或者 $|z|\leqslant 1$, $z\neq 1$, $\operatorname{Re}s>0$; 或者 $z=1$, $\operatorname{Re}s>1$. 如果沿着正实 z–轴由 1 至 ∞ 作一剖割,则在 z 剖面内,只要 $\operatorname{Re}s>0$ 及 $\operatorname{Re}v>0$, Φ 便将是 z 的一个解析函数.

由定义式 (1) 及普命那求和公式 1-9(11) 可得以定积分表示的另一表示式

(4) $\Phi(z, s, v)=\frac{1}{2}v^{-s}+\int_{0}^{\infty}(v+t)^{-s}z^{t}dt$

$$-2\int_{0}^{\infty}\sin\{t\ln z-s\tan^{-1}(t/v)\}(v^{2}+t^{2})^{-\frac{1}{2}s}(e^{2\pi t}-1)^{-1}dt,$$

$$\operatorname{Re}v>0.$$

当 $z=1$ 时重新得到漢米特公式 1-10(7).

在公式(3)中取 $z=e^{i\theta}$ 就可得李普西特茨公式:

$$2\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}e^{in\theta}(v+n)^{-s}=\int_{0}^{\infty}t^{s-1}e^{-vt}(e^{i\theta}-e^{-t})(\operatorname{ch}t-\cos\theta)^{-1}dt.$$

$$0<\theta<2\pi, \quad \operatorname{Re}s>0, \quad \operatorname{Re}v>-1.$$

Φ 可以表示为閉綫積分

(5) $$2\pi i\Phi(z, s, v) = -\Gamma(1-s)\int_{\infty}^{(0+)} (-t)^{s-1} e^{-vt}(1-ze^{-t})^{-1}dt,$$

$$\mathrm{Re}\, v>0, \quad |\arg(-t)|\leqslant\pi.$$

像在 1-6 節中一样，假設圍道并不圍住(5)式被積函数的極点 $t=\ln z\pm 2n\pi i(n=0, 1, 2\cdots)$中的任何一点．对于每一个非正整数的固定的 s，方程(5)定义 Φ 为 z 的一个解析函数，在剖割平面内正則，而对于剖割平面内每一个固定的 z，方程(5)定义 Φ 为 s 的一个解析函数，除了可能在点 $s=1, 2, 3\cdots$之外(这可以理解为 $Re\, v>0$)都正則．

像上節中一样，我們的函数也可以用級数來表示．为此，考慮沿着圍道 c 的積分

$$\int_c (-t)^{s-1} e^{-vt}(1-ze)^{-1}dt,$$

圍道 c 系由半徑为$(2N+1)\pi$(N 为正整数)的圓周 K 及一个圍繞原点的迴綫 L 組成．在这种情况下圓的圓心为点 $t=\ln z(z\neq 1)$，而所有的点 $t=\ln z\pm 2n\pi i(n=0, 1, 2, \cdots)$均在迴綫 L 的外面．令 $N\to\infty$，可以証明只要 $Re\, s<0$，且 $0<v\leqslant 1$，沿着 K 的積分將趨向于零．因而

$$\Phi(z, s, v)=\Gamma(1-s)\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n.$$

其中 $R_n=z^{-1}(-t_n)^{s-1}e^{-(v-1)t_n}$ 为被積表达式在極 $t=t_n=\ln z+2n\pi i$ 上的留数．从而得

(6) $$\Phi(z, s, v)=z^{-v}\Gamma(1-s)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-\ln z+2n\pi i)^{s-1}e^{2n\pi iv},$$

$$0<v\leqslant 1,\ \mathrm{Re}\, s<0;\ |\arg(-\ln z+2n\pi i)|\leqslant\pi.$$

寫出下面的式子

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-\ln z+2n\pi i)^{s-1}e^{2n\pi iv}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2n\pi iv}(-\ln z-2n\pi i)^{s-1}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}e^{2n\pi iv}(-\ln z+2n\pi i)^{s-1}.$$

并与(1)式比較，立卽可得函数 $\Phi(z, s, v)$ 的李奇变換公式：

(7) $$\Phi(z, s, v) = iz^{-v}(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\{e^{-i\pi s/2}\Phi[e^{-2\pi iv}, 1-s, (\ln z)/2\pi i] - e^{i\pi(s/2+2v)}\Phi[e^{2\pi iv}, 1-s, 1-(\ln z)/2\pi i]\}.$$

如果在式(6)中应用二项式展开公式

$$(-\ln z + 2n\pi i)^{s-1}$$
$$= -(2n\pi)^{s-1}ie^{i\pi s/2}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{s-1}{r}[(\ln z)/(2n\pi)]^r e^{-i\pi r/2},$$
$$(-\ln z - 2n\pi i)^{s-1}$$
$$= (2n\pi)^{s-1}ie^{-i\pi s/2}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{s-1}{r}[(\ln z)/(2n\pi)]^r e^{-i\pi r/2},$$

则可得

$$z^v\Phi(z, s, v)/\Gamma(1-s) = [\ln(1/z)]^{s-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}(2\pi n)^{s-1}$$
$$\times\Big\{(-1)^r\binom{s-1}{2r}\sin(\tfrac{1}{2}\pi s + 2n\pi v)[(\ln z)/(2n\pi)]^{2r}$$
$$+(-1)^r\binom{s-1}{2r+1}\cos(\tfrac{1}{2}\pi s + 2n\pi v)[(\ln z)/(2\pi n)]^{2r+1}\Big\}.$$

应用赫威兹公式 1-10(6)，对 n 求和，可得

(8) $$\Phi(z, s, v) = \frac{\Gamma(1-s)}{z^v}(\ln 1/z)^{s-1} + z^{-v}\sum_{r=0}^{\infty}\zeta(s, -r, v)\frac{(\ln z)^r}{r!},$$
$$|\ln z| < 2\pi,\ s \neq 1, 2, 3, \cdots\ v \neq 0, -1, -2, \cdots.$$

如果 s 为一正整数，$s=m$，先設 $s=m+\varepsilon$，由 1-17(11)式及 1-10(9) 式，得

$$(\ln 1/z)^{\varepsilon} = 1 + \varepsilon\ln(\ln 1/z) + 0(\varepsilon^2),$$
$$\Gamma(1-s) = \Gamma(1-m-\varepsilon) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}[\varepsilon^{-1} - \psi(m)] + 0(\varepsilon),$$
$$\zeta(1+\varepsilon, v) = \varepsilon^{-1} - \psi(v) + 0(\varepsilon).$$

使 $\varepsilon\to 0$，则由式(8)可得

(9) $$\Phi(z, m, v) = z^{-v}\Big\{\sum_{n=0}^{\infty}{}'\zeta(m-n, v)\frac{(\ln z)^n}{n!}$$
$$+\frac{(\ln z)^{m-1}}{(m-1)!}[\psi(m) - \psi(v) - \ln(\ln 1/z)]\Big\},$$
$$m = 2, 3, 4\cdots,\quad |\ln z| < 2\pi,\ v \neq 0, -1, -2, \cdots.$$

一撇表示 $n=m-1$ 的项应該略去.

在 $s=1$ 的情况下,上式可簡化为

$$(10)\quad \Phi(z,1,v)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n+v}=v^{-1}{}_2F_1(1,v;1+v;z),\qquad |z|<1.$$

由 1-8(6) 式可知

$$G(v)=2\Phi(-1,1,v).$$

如果 s 为一負整数, $s=-m(m=1,2,3\cdots)$, 我們可以利用 1-10(11) 式將(8)式的 Φ 用柏努利多項式來表示:

$$(11)\quad \Phi(z,-m,v)=\frac{m!}{z^v}(\ln 1/z)^{-m-1}-\frac{1}{z^v}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{B_{m+r+1}(v)(\ln z)^r}{r!(m+r+1)}$$

$$|\ln z|<2\pi,$$

最后由式(8)及(10)可導出

$$(12)\quad \lim_{z\to1}(1-z)^{1-s}\Phi(z,s,v)=\Gamma(1-s),\qquad Re\, s<1,$$

$$(13)\quad \lim_{z\to1}\Phi(z,1,v)/[-\ln(1-z)]=1.$$

函数

$$(14)\quad F(z,s)=\sum_{n=1}^{\infty}(z^n/n^s)=z\Phi(z,s,1)$$

的性質可以很容易地由公式(1)至(13)中推出. 如果 $s=-m(m=1,2,3\cdots)$, 則由式(11)及 1-13(7)式得

$$(15)\quad F(z,-m)=m!(\ln 1/z)^{-m-1}-\sum_{r=0}^{\infty}\frac{B_{m+r+1}}{(m+r+1)r!}(\ln z)^r$$

$$|\ln z|<2\pi,$$

其中 B_{m+r+1} 代表柏努利数.

由李奇变换式 1-11(7) 可得乔恩斯全关系式:

$$(16)\quad F(z,s)+e^{is\pi}F(1/z,s)=\frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)}e^{i\pi s/2}\zeta\left(1-s,\frac{\ln z}{2\pi i}\right).$$

此外,我們有

$$(17)\quad F(z,-m)=(-1)^{m+1}F(1/z,-m),\qquad m=1,2,3\cdots,$$

$$(18)\quad F(z,m)+(-1)^mF(1/z,m)=-\frac{(2\pi i)^m}{m!}B_m\left(\frac{\ln z}{2\pi i}\right).$$

$$m=2,3,4\cdots$$

这些方程給出了級数(14)在收斂圓 $|z|=1$ 以外的解析开拓.

如果 $F_0(z)$ 为 $F(z)$ 在剖面 z 上的主枝,$[0<\arg(z-1)<2\pi]$,剖割是沿着实軸的 1 至 ∞ 間進行的,在剖割的上部边界上的一点与剖割的下部边界上的一点的 $F_0(z)$ 数値之差由(16)式可知为

$$(19)\quad F_0(x,s)-F_0(xe^{2i\pi},s)=\frac{2\pi i}{\Gamma(s)}(\ln x)^{s-1}.$$

因此,如果我們穿过剖面,由上半平面至下半平面,可得 $F_0(z)$ 的开拓 $F_1(z)$,

$$(20)\quad F_1(z)=F_0(z)+2\pi i\,(\ln z)^{s-1}/\Gamma(s).$$

开拓的反演过程的类似公式为

$$(21)\quad F_2(z)=F_0(z)-2\pi i\,(\ln z)^{s-1}/\Gamma(s).$$

(進一步对函数 $F(z,s)$ 的討論可参看 Truesdell 的著作,1945, p. 144).

1-11-1. 欧拉重对数

欧拉的重对数定义为

$$(22)\quad L_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(z^n/n^2)=-\int_0^z z^{-1}\ln(1-z)dz=F(z,2),$$

这是(14)式的一个特殊情形.

由式(18)得如下方程

$$(23)\quad L_2(z)=-L_2(1/z)-1/2(\ln z)^2+\pi i\ln z+\pi^2/3.$$

如果我們以 $L_2^*(z)$ 表示 $L_2(z)$ 的主枝 $[0<\arg(z-1)<2\pi]$,公式(19)及(20)表明对于任意枝,有

$$L_2(z)=L_2^*(z)+2n\pi i\ln z+4m\pi^2,\quad n,m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

(詳細的討論見 O. Hölder 1928, p. 312. 对于(14)的其他特殊情况見 Ramanujan 1927, p. 40, 336; Rogers, 1905; 及 Sandham, 1949).

1-12. 黎曼的 ζ 函数

在 1-10(1)式中,令 $v=1$,則得黎曼 ζ 函数

$$(1)\qquad \zeta(s)=\zeta(s,1)=\Phi(1,s,1)=\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^s),\qquad \operatorname{Re}s>1.$$

因而有

$$(2)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^{n-1}/n^s]=(1-2^{1-s})\zeta(s)=\Phi(-1,s,1),\ \operatorname{Re}s>0,$$

$$(3)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}[1/(2n+1)^s]=(1-2^{-s})\zeta(s)=2^{-s}\Phi(1,s,1/2),\ \operatorname{Re}s>1.$$

因而可得$\zeta(s)$的積分表示式如下:[見 1-10(3) 式及 1-11(3) 式]:

$$(4)\qquad \Gamma(s)\zeta(s)=\int_0^{\infty}t^{s-1}(e^t-1)^{-1}dt=2^{s-1}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{s-1}\operatorname{csch}t\,dt,\qquad \operatorname{Re}s>1,$$

$$(5)\qquad (1-2^{1-s})\Gamma(s)\zeta(s)=\int_0^{\infty}t^{s-1}(e^t+1)^{-1}dt=2^{s-1}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{s-1}\operatorname{sech}t\,dt\qquad \operatorname{Re}s>0,$$

$$(6)\qquad 2\Gamma(s)(1-2^{-s})\zeta(s)=\int_0^{\infty}t^{s-1}\operatorname{csch}t\,dt\qquad \operatorname{Re}s>1.$$

由 1-11(1) 及 1-11(3) 式可得

$$(7)\qquad \zeta(s)=\Phi_s(1,s+1,0)=[2^{s-1}/\Gamma(s+1)]\int_0^{\infty}t^s(\operatorname{csch}t)^2\,dt\qquad \operatorname{Re}s>1,$$

$$(8)\qquad (1-2^{1-s})\zeta(s)=\Phi_s(-1,s+1,0)=[2^{s-1}/\Gamma(s+1)]\int_0^{\infty}t^s(\operatorname{sech}t)^2\,dt\qquad \operatorname{Re}s>-1.$$

由 1-10(5) 式及 1-11(5) 式,并應用式 (1), (2) 及 (3), 当 $s\neq 1, 2, 3\cdots$, $|\arg(-t)|\leqslant\pi$ 时,用圍綫積分可得 $\zeta(s)$的如下表示式:

$$(9)\qquad 2\pi i\zeta(s)=-\Gamma(1-s)\int_{\infty}^{(0+)}(-t)^{s-1}(e^t-1)^{-1}\,dt.$$

$$(10)\qquad 2\pi i(1-2^{1-s})\zeta(s)=-\Gamma(1-s)\int_{\infty}^{(0+)}(-t)^{s-1}(e^t+1)^{-1}\,dt.$$

$$(11)\qquad 4\pi i(1-2^{-s})\zeta(s)=-\Gamma(1-s)\int_{\infty}^{(0+)}(-t)^{s-1}\operatorname{csch}t\,dt.$$

(9)及(11)式中的圍道不包含 $t=\pm 2n\pi i$ 中的任何一点，(10)式中的圍道不包含 $t=(2n-1)\pi i$ 中的任何一点.

由(1)及 1-10(7) 可得

$$(12)\quad \zeta(s)=1/2+1/(s-1)+2\int_0^\infty (1+t^2)^{-s/2}(e^{2\pi t}-1)^{-1}\sin(s\tan^{-1}t)\,dt.$$

此外 (Lindelöf, 1905, p. 103) 尚有

$$(13)\quad \zeta(s)=\frac{2^{s-1}}{s-1}-2^s\int_0^\infty (1+t^2)^{-s/2}(e^{2\pi t}+1)^{-1}\sin(\tan^{-1}t)\,dt,$$

$$(14)\quad \zeta(s)=\frac{\pi 2^{s-2}}{s-1}\int_0^\infty (1+t^2)^{\frac{1}{2}(1-s)}\frac{\cos[(s-1)\tan^{-1}t]}{[\mathrm{ch}(\frac{1}{2}\pi t)]^2}\,dt,$$

$$(15)\quad \zeta(s)=\frac{2^{s-1}}{1-2^{1-s}}\int_0^\infty (1+t^2)^{-s/2}\frac{\cos(s\tan^{-1}t)}{\mathrm{ch}(\frac{1}{2}\pi t)}\,dt.$$

这些公式是金生所導出．式(12)至(15)中的積分定义了一个对 s 的一切値都解析的函数.

另外的積分表示式尚有 (Bruijn 1937)

$$\zeta(s)=(s-1)^{-1}+\pi^{-1}\sin(\pi s)\int_0^\infty[\ln(1+x)-\psi(1+x)]x^{-s}\,dx,$$

$$\zeta(1+s)=(\pi s)^{-1}\sin(\pi s)\int_0^\infty \psi'(1+x)x^{-s}\,dx$$

$$=\pi^{-1}\sin(\pi s)\int_0^\infty[\psi(1+x)+\gamma]x^{-1-s}\,dx,$$

$$\zeta(m+s)=(-1)^{m-1}\frac{\Gamma(s)\sin(\pi s)}{\pi\Gamma(m+s)}\int_0^\infty \psi^{(m)}(1+x)x^{-s}\,dx,$$

$$m=1,2,3\cdots.$$

这些公式当 $0<\mathrm{Re}\, s<1$ 时成立，而 $\psi^{(m)}$ 是由 1-16(1) 式所定义．此外

$$\zeta(s)=(s-1)^{-1}+\frac{\sin(\pi s)}{\pi(s-1)}\int_0^\infty[\psi'(1+x)-(1+x)^{-1}]x^{1-s}\,dx.$$

$$0<\mathrm{Re}\, s<2,\quad s\neq 1.$$

最后我們來証明 $\zeta(s)$ 的黎曼表示式，

$$(16)\quad \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)=\frac{1}{s(s-1)}+\int_0^\infty (t^{\frac{1}{2}(1-s)}+t^{s/2})t^{-1}\omega(t)\,dt$$

其中

$$\omega(t)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi t}=\tfrac{1}{2}[\theta_3(0,\ it)-1],$$

θ_3 为椭圆 θ 函数. (16)式中的積分是一个 s 的解析函数,它对 s 的一切值都解析.

由 1-1(5) 式得

$$\int_0^{\infty} e^{-n^2\pi t}\, t^{s/2-1}\,dt=\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)n^{-s}, \qquad \operatorname{Re} s>0.$$

从而可得

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)=\int_0^{\infty}\omega(t)t^{s/2-1}\,dt$$

$$=\int_0^{1}\omega(t)t^{s/2-1}\,dt+\int_1^{\infty}\omega(t)t^{s/2-1}\,dt.$$

但是根据 θ 函数的雅可比虚数变换 (Whittaker and Watson, 1927, § 21-51) 可得

$$\omega(t)=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}\omega\left(\frac{1}{t}\right).$$

將这一式引入積分中,可得

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

$$=-(1/s)+1/(s-1)+\int_0^{1}\omega(1/t)t^{s/2-3/2}\,dt+\int_1^{\infty}\omega(t)t^{s/2-1}\,dt,$$

並將 $1/t=t'$ 代入第一个積分式中,就得到式(16). 对于其他的積分表示式可參看 Ramanujan, 1927, p. 72; Hardy, 1949, pp. 333, 337.

$\zeta(s)$的一个冪級数展开式为 [Hardy, 1912, p. 215; Kluyver, 1927, p. 185].

$$(17)\qquad \zeta(s)=(s-1)^{-1}+\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n(s-1)^n$$

其中

$$\gamma_n=\lim_{m\to\infty}\left[\sum_{l=1}^{m} l^{-1}(\ln l)^n-(n+1)^{-1}(\ln l)^{n+1}\right].$$

在 1-10(8) 至 1-10(11)式中,令 $v=1$, 則得

$$(18)\quad \zeta(0)=-\tfrac{1}{2},\quad \zeta'(0)=-\tfrac{1}{2}\ln(2\pi);$$

(19)　$\lim\limits_{s\to1}[\zeta(s)-1/(s-1)]=-\psi(1)=\gamma$,

且[見 1-13(7) 式]

(20)　$\zeta(-m)=-\dfrac{B_{m+1}}{m+1}$,　　$m=1, 2, 3\cdots$

或

(21)　$\zeta(-2m)=0,\quad \zeta(2m)=(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m}\dfrac{B_{2m}}{2(2m)!}$,

$m=1, 2, 3, \cdots$

(22)　$\zeta[-(2m-1)]=-\dfrac{B_{2m}}{2m}$.

在赫威兹方程中,使 $v=1$, 可得 $\zeta(s)$ 的黎曼函数方程

(23)　$\zeta(s)=\dfrac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\sin(\pi s/2)\zeta(1-s)$

或根据 1-2(6) 式

(24)　$\zeta(1-s)=(2\pi)^{-s}2\Gamma(s)\cos(\pi s/2)\zeta(s)$.

引進一个由下式定义的新函数

(25)　$\xi(s)=\dfrac{s(s-1)}{2}\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s)$

則得

(26)　$\xi(1-s)=\xi(s)$

这个函数称为黎曼的 ξ 函数. ζ 函数的漸近表示式可参看 Hutchinson 1925; Titchmarsh, 1935, 1936; 对于許多其他的結果,見 Titchmarsh, 1930.

如果我們考慮函数

(27)　$L(s)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^m}{(2m+1)^s}$,　　$\operatorname{Re}s>0$,

它与 ζ 函数相仿,根据 1-11(1) 及 1-11(3), 得

(28)　$L(s)=2^{-s}\Phi(-1, s, \tfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2\Gamma(s)}\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{t^{s-1}}{\operatorname{ch}t}dt$,　　$\operatorname{Re}s>0$.

在李奇变换式 1-11(7) 中使 $z=-1$, $v=\frac{1}{2}$, 就可得 $L(s)$ 的下列函数方程:

(29)　$L(1-s)=(2/\pi)^s\Gamma(s)\sin(\pi s/2)L(s)$.

(進一步研究可参看 Lichtenbanm, 1931, p. 641).

1-13. 柏努利数与柏努利多項式

柏努利数 B_n 由下式定义

(1) $$z(e^z-1)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n/n! \qquad z<2\pi,$$

柏努利多項式 $B_n(x)$ 則定义为

(2) $$ze^{xz}(e^z-1)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)z^n/n! \qquad |z|<2\pi.$$

由于(2)式的左边为

$$\left\{\sum_{r=0}^{\infty} B_r z^r/r!\right\}\cdot\left\{\sum_{m=0}^{\infty}[(xz)^m/m!]\right\},$$

柯西的冪級数乘法規則給出

(3) $$B_n(x)=x^n+\binom{n}{1}B_1x^{n-1}+\cdots+\binom{n}{n-1}B_{n-1}x+\binom{n}{n}B_n$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}B_r x^{n-r},$$

$$B_0(x)=1,\ B_1(x)=x-\tfrac{1}{2},\ B_2(x)=x^2-x+1/6,$$

$$B_3(x)=x^3-3/2\,x^2+\tfrac{1}{2}x,\ B_4(x)=x^4-2x^3+x^2-1/30,\cdots,$$

顯然我們有

(4) $$B_n(0)=B_n.$$

將式(2)对 x 微分,并比較系数得

(5) $$B_n'(x)=nB_{n-1}(x).$$

由(2)可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}[B_n(x+1)-B_n(x)]\frac{z^n}{n!}=ze^{xz}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}z^n}{(n-1)!}.$$

从而有

$$B_0(x+1)=B_0(x),\quad B_1(x+1)-B_1(x)=1,$$

一般地有

(6) $$B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}, \qquad n=2,3,4\cdots.$$

由此可得

(7) $$B_n(1)=B_n(0)=B_n, \qquad n\geqslant 2.$$

由于

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x+1)\frac{z^n}{n!}=\frac{ze^{xz}e^z}{e^z-1}=\sum_{r=0}^{\infty} B_r(x)\frac{z^r}{r!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!},$$

故从柯西的冪級数乘法規則可得柏努利多項式的一个遞推公式：

$$(8)\qquad \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}B_r(x)=B_n(x+1),\ \text{或}\ \sum_{r=0}^{n-1}\binom{n}{r}B_r(x)=nx^{n-1},$$

$$n=2,3,4\cdots.$$

由(5)及(6)可得

$$(9)\qquad \int_x^y B_n(t)dt=\frac{B_{n+1}(y)-B_{n+1}(x)}{n+1},\quad \int_x^{x+1} B_n(t)dt=x^n.$$

从而有

$$(10)\qquad \sum_{r=0}^{m-1} r^n=\sum_{r=0}^{m-1}\int_r^{r+1} B_n(t)dt=\int_0^m B_n(t)dt=\frac{B_{n+1}(m)-B_{n+1}}{n+1}$$

$$n=2,3,4,\cdots$$

由式(6)可得 $B_n(x)$ 的乘法定理及其对称性質(見 Fort p. 32 及 34)

$$(11)\qquad B_n(mx)=m^{n-1}\sum_{r=0}^{m-1} B_n(x+r/m),$$

$$(12)\qquad B_n(1-x)=(-1)^n B_n(x).$$

柏努利多項式可以用三角級数來表示．对于 $B_1(x)$，由式(3)可得

$$(13)\qquad B_1(x)=x-\tfrac{1}{2}=-\sum_{r=1}^{\infty}(r\pi)^{-1}\sin(2\pi rx)\qquad 0<x<1.$$

$k>1$ 的 $B_k(x)$ 的富里哀級数可以很容易地由留数積分中得出．考慮 $\int_c f(z)dz$，其中 $f(z)=z^{-k}e^{xz}(e^z-1)^{-1}$，($k$ 为大于 1 的整数)，閉道 c 为一个大的圓，其半徑为 $(2N+1)\pi$，(N 为整数)，圓心在原点．被積函数的極为 $z_r=2\pi ir$，($r=0,\pm1,\pm2,\cdots$) 当 $r=\pm1,\pm2,\cdots$时，函数 $f(z)$的留数顯然为 $(2\pi ir)^{-k}e^{2\pi irx}$，而由式(2)可知，在 $z=0$ 的留数为 $B_k(x)/k!$．只要 $0\leqslant x\leqslant1$，在 $N\to\infty$ 时沿着圓周 C 的積分趋于 0．而由留数理論可知

$$B_k(x)/k!=-\sum_{r=-\infty}^{\infty}{}'(2\pi ir)^{-k}e^{2\pi irx}.$$

一撇表示对应于 $r=0$ 的項应略去. 由此得到展开式 ($n=1, 2, 3, \cdots; 0\leqslant x\leqslant 1$)

(14) $B_{2n}(x)=2(-1)^{n+1}(2n)!\sum_{r=1}^{\infty}(2\pi r)^{-2n}\cos(2\pi rx)$,

(15) $B_{2n+1}(x)=2(-1)^{n+1}(2n+1)!\sum_{r=1}^{\infty}(2\pi r)^{-2n-1}\sin(2\pi rx)$.

使 $x=0$, 就可得到下面的柏努利数表达式 (并見 Schwatt, 1932, p. 143):

(16) $B_{2n}=2(-1)^{n+1}(2n)!\sum_{r=1}^{\infty}(2\pi r)^{-2n}$　　$n=1, 2, 3, \cdots$

(17) $B_{2n+1}=0$　　$n=1, 2, 3, \cdots$

方程(4)及(8)給出了柏努利数的遞推公式:

(18) $\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n}{r}B_r=0$　　$n=2, 3, 4, \cdots$

由(18)及(3)可得

(19) $B_0=1, B_1=-1/2, B_2=1/6, B_4=-1/30, B_6=1/42, \cdots$, B_{2n} 在 B_{40} 内的数值及其遞推关系可以参看 Ramanujan 的著作, 1927, p. 1.

应用公式 (14), (15) 及 1-11(4) 可得下面的柏努利多項式的積分表示式:

(20) $B_{2n}(x)=(-1)^{n+1}(2n)\int_0^{\infty}\frac{\cos(2\pi x)-e^{-2\pi t}}{\operatorname{ch}(2\pi t)-\cos(2\pi x)}t^{2n-1}\,dt$

$0<\operatorname{Re}x<1, \quad n=1, 2, 3, \cdots$

(21) $B_{2n+1}(x)=(-1)^{n+1}(2n+1)\int_0^{\infty}\frac{\sin(2\pi x)}{\operatorname{ch}(2\pi t)-\cos(2\pi x)}t^{2n}\,dt$

$0<\operatorname{Re}x<1, \quad n=0, 1, 2, \cdots$

用 1-12(1) 的黎曼 ζ 函数表示时, 则由(16)及 1-12(22) 可知为:

(22) $B_{2n}=(-1)^{n+1}(2\pi)^{-2n}2(2n)!\zeta(2n)$　　$n=0, 1, 2, \cdots$

(23) $B_{2n}=-2n\zeta[-(2n-1)]$　　$n=1, 2, 3, \cdots$

由 1-12(4) 至 1-12(8) 式得 $B_{2n}(n=1, 2, 3, \cdots)$ 的積分表示式如下:

(24) $$B_{2n}=(-1)^{n+1}4n\int_0^{\infty}t^{2n-1}(e^{2\pi t}-1)^{-1}dt$$
$$=(-1)^{n+1}2n\int_0^{\infty}t^{2n-1}e^{-\pi t}\operatorname{csch}(\pi t)\,dt,$$

(25) $$B_{2n}=(-1)^{n+1}4n(1-2^{1-2n})^{-1}\int_0^{\infty}t^{2n-1}(e^{2\pi t}+1)^{-1}dt$$
$$=(-1)^{n+1}2n(1-2^{1-2n})^{-1}\int_0^{\infty}t^{2n-1}e^{-\pi t}\operatorname{sech}(\pi t)\,dt,$$

(26) $$B_{2n}=(-1)^{n+1}2n(2^{2n}-1)^{-1}\int_0^{\infty}t^{2n-1}\operatorname{csch}(\pi t)\,dt,$$

(27) $$B_{2n}=(-1)^{n+1}\pi\int_0^{\infty}t^{2n}[\operatorname{csch}(\pi t)]^2\,dt,$$

(28) $$B_{2n}=(-1)^{n+1}\pi(1-2^{1-2n})^{-1}\int_0^{\infty}t^{2n}[\operatorname{sech}(\pi t)]^2\,dt.$$

[其他的結果可参看 Nielsen, 1923 及 Ramanujan, 1927, p. 1].

1-13-1. 高階柏努利多项式

m 階的柏努利数及柏努利多项式分别定义为:

(29) $$\alpha_1\cdots\alpha_m z^m[(e^{\alpha_1 z}-1)\cdots(e^{\alpha_m z}-1)]^{-1}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(m)}(\alpha_1\cdots\alpha_m)z^n/n! \qquad |z|<2\pi|\alpha_l|^{-1},$$

(30) $$\alpha_1\cdots\alpha_m z^m[(e^{\alpha_1 z}-1)\cdots(e^{\alpha_m z}-1)]^{-1}e^{xz}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(m)}(x|\alpha_1\cdots\alpha_m)z^n/n! \qquad |z|<2\pi|\alpha_l|^{-1}.$$

此处 m 为一正整数, $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为任意参数,且

(31) $$|\alpha_l|=\max[|\alpha_1|,\cdots,|\alpha_m|].$$

对于 $m=1$, $\alpha_1=1$, (29) 及(30)两式分别簡化成(1)及(2)式.

顯然我們有

(32) $$B_n^{(m)}(0|\alpha_1\cdots\alpha_m)=B_n^{(m)}(\alpha_1\cdots\alpha_m),$$

(33) $$B_n^{(1)}(x|\alpha_1)=\alpha_1^nB_n(x/\alpha_1).$$

由(29)及(30)

(34) $B_n^{(m)}(x|\alpha_1\cdots\alpha_m)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}x^l B_{n-l}^{(m)}(\alpha_1\cdots\alpha_m)$.

設

(35) $\xi=\frac{1}{2}(\alpha_1+\cdots+\alpha_m)$

(36) $D_n^{(m)}=2^n B_n^{(m)}(\xi|\alpha_1\cdots\alpha_m)$.

可以証明

(37) $D_{2n+1}^{(m)}=0,\qquad n=0,1,2,\cdots$

从而由(30)得

(38) $(\alpha_1\cdots\alpha_m)z^m[\mathrm{sh}\,(\alpha_1 z)\cdots\mathrm{sh}\,(\alpha_m z)]^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}D_{2n}^{(m)}z^{2n}/(2n)!$

$|z|<\pi|\alpha_l|^{-1}$

$-m(m=1,2,3\cdots)$階的柏努利数及多項式分别定义为

(39) $(e^{\alpha_1 z}-1)\cdots(e^{\alpha_m z}-1)(\alpha_1\cdots\alpha_m)^{-1}z^{-m}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(-m)}(\alpha_1\cdots\alpha_m)z^n/n!,$$

(40) $(e^{\alpha_1 z}-1)\cdots(e^{\alpha_m z}-1)(\alpha_1\cdots\alpha_m)^{-1}z^{-m}e^{xz}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(-m)}(x|\alpha_1\cdots\alpha_m)z^n/n!;$$

两个展开式在整个 z 平面上都收斂。

对于 $x=-\xi$, 由(35)及(40)式得

(41) $\mathrm{sh}\,(\alpha_1 z)\cdots\mathrm{sh}\,(\alpha_m z)(\alpha_1\cdots\alpha_m)^{-1}z^{-m}=\sum_{n=0}^{\infty}D_{2n}^{(-m)}z^{2n}/(2n)!$,

其中

(42) $D_n^{(-m)}=2^n B_n^{(-m)}(-\xi|\alpha_1\cdots\alpha_m)$.

又

(43) $D_{2n+1}^{(-m)}=0\qquad n=0,1,2,\cdots$.

高階柏努利数及柏努利多項式的詳細研究可参看 Nörland 的著作, 1922 及 1924, 第 6 章.

对 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_m=1$ 的情形,在 Milne-Thomson 的著作, 1933, 第 6 章中有詳尽的敘述.

1-14. 欧拉数及欧拉多项式

欧拉数 E_n 及欧拉多项式 $E_n(x)$ 由下面的方程定义：

(1)　$\operatorname{sech} z = 2e^z(e^{2z}+1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n z^n/n!$　　$|z| < \frac{1}{2}\pi$,

(2)　$2e^{xz}(e^z+1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) z^n/n!$　　$|z| < \pi$.

將(2)式对 x 微分并比較 z^n 的系数得

(3)　$E_n'(x) = nE_{n-1}(x)$.

如果將(2)式的左边寫成下列形式：

$$2e^{z/2}(e^z+1)^{-1}e^{z(x-\frac{1}{2})} = \sum_{r=0}^{\infty} E_r z^r (r!2^r)^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} (x-\tfrac{1}{2})^m z^m/m!,$$

則根据柯西冪級数乘法規則可得

(4)　$E_n(x) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} 2^{-r} E_r (x-\frac{1}{2})^{n-r}$,

取 $x=\frac{1}{2}$，則

(5)　$E_n = 2^n E_n(\frac{1}{2})$.

由式(2)有

$$\sum_{n=0}^{\infty} [E_n(x+1)+E_n(x)]z^n/n! = 2e^{xz} = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n z^n/n!,$$

故

(6)　$E_n(x+1)+E_n(x) = 2x^n$.

設

$$ze^{xz/2}(e^{z/2}+1)^{-1} = ze^{(x+1)z/2}(e^z-1)^{-1} - ze^{xz/2}(e^z-1)^{-1},$$

由(2)及 1-13(2) 式得

(7)　$E_{n-1}(x) = n^{-1}2^n\{B_n[\frac{1}{2}(x+1)] - B_n(\frac{1}{2}x)\}$

$\qquad = n^{-1}2[B_n(x) - 2^n B_n(\frac{1}{2}x)]$.

故由 1-13(11) 及 1-13(12) 可得下列关系式

(8)　$E_n(mx) = m^n \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r E_n(x+r/m)$　　m 为奇数，

(9)　$E_n(mx) = -2m^n(n+1)^{-1} \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r B_{n+1}(x+r/m)$

m 为偶数，

(10)　$E_n(1-x)=(-1)^n E_n(x)$.

由

$$2e^{(x+1)z}(e^z+1)^{-1}=\sum_{r=0}^{\infty}E_r(x)z^r/r!\sum_{m=0}^{\infty}z^m/m!$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}E_n(x+1)z^n/n!$$

可得一遞推公式

(11)　$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}E_r(x)=E_n(x+1)$,

或　$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}E_r(x)+E_n(x)=2x^n$.

用 1–13 節同样的方法可以得到一个用富里衰級数表示的歐拉多項式表示式．此处有人研究了沿着圓心在原点、半徑为 $2N\pi$（N 为整数）的圓周進行的積分 $2\int_c z^{-k-1}e^{xz}(e^z+1)^{-1}dz$．由式(2)可明顯地看出在 $z=0$ 上被積表达式的留数为 $E_k(x)/k!$．結果就是

(12)　$E_{2n}(x)=(-1)^n 4(2n)!$
$$\times\sum_{r=0}^{\infty}[(2r+1)\pi]^{-2n-1}\sin[(2r+1)\pi x]$$
$$n=1,2,3\cdots,\ 0\leqslant x\leqslant 1,$$

(13)　$E_{2n+1}(x)=(-1)^{n+1}4(2n+1)!$
$$\times\sum_{r=0}^{\infty}[(2r+1)\pi]^{-2n-2}\cos[(2r+1)\pi x]$$
$$n=0,1,2,\cdots,\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

由 (5), (12), 及 (13) 可得

(14)　$E_{2n}=(-1)^n 2(2n)!(2/\pi)^{2n+1}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r/(2r+1)^{2n+1}$
$$n=0,1,2,\cdots$$

(15)　$E_{2n+1}=0$

或者，用 1–12(27) 式的記法

(16)　$E_{2n}=(-1)^n 2(2n)!(2/\pi)^{2n+1}L(2n+1)$　$n=0,1,2,\cdots$.

由方程

$$(1/\mathrm{ch}z)\,\mathrm{ch}z=1=\sum_{n=0}^{\infty}E_{2n}z^{2n}/(2n)!\,\sum_{m=0}^{\infty}z^{2m}/(2m)!,$$

并应用柯西的乘法规则可得欧拉数的遞推公式:

$$(17)\quad \sum_{r=0}^{n}\binom{2n}{2r}E_{2r}=0 \qquad n>0.$$

利用(14)可得

$$E_0=1,\ E_2=-1,\ E_4=5,\ E_6=-61,\ E_8=1385,\ \cdots$$

在(16)式中如以 1-12(28) 式代换 $L(2n+1)$，可得 E_{2n} 的一个積分式:

$$(18)\quad E_{2n}=(-1)^n(2/\pi)^{2n+1}\int_0^{\infty}t^{2n}\,\mathrm{sech}\,t\,dt$$

$$=(-1)^n2^{2n+1}\int_0^{\infty}t^{2n}\,\mathrm{sech}\,(\pi t)dt \qquad n=0,1,2,\cdots$$

富里哀展开式(12)及(13)可以轉化为積分表达式. 結果是:

$$(19)\quad E_{2n}(x)=(-1)^n4\int_0^{\infty}\frac{t^{2n}\sin(\pi x)\,\mathrm{ch}(\pi t)}{\mathrm{ch}(2\pi t)-\cos(2\pi x)}dt$$

$$n=0,1,2,\cdots,\quad 0<\mathrm{Re}\,x<1,$$

$$(20)\quad E_{2n+1}(x)=(-1)^{n+1}4\int_0^{\infty}\frac{t^{2n+1}\cos(\pi x)\,\mathrm{sh}(\pi t)}{\mathrm{ch}(2\pi t)-\cos(2\pi x)}dt$$

$$n=0,1,2,\cdots,\quad 0<\mathrm{Re}\,x<1.$$

(其他結果可参看 Nielsen, 1923).

1-14-1. 高階欧拉多項式

欧拉数及欧拉多項式分别定义为

$$(21)\quad 2^m e^{z(\alpha_1+\cdots+\alpha_m)}[(e^{2\alpha_1 z}+1)\cdots(e^{2\alpha_m z}+1)]^{-1}$$

$$=[\mathrm{ch}(\alpha_1 z)\cdots\mathrm{ch}(\alpha_m z)]^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n^{(m)}(\alpha_1\cdots\alpha_m)z^n/n!,$$

$$(22)\quad 2^m e^{xz}[(e^{\alpha_1 z}+1)\cdots(e^{\alpha_m z}+1)]^{-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}E_n^{(m)}(x|\alpha_1\cdots\alpha_m)z^n/n!.$$

(21) 式的級数当 $|z|<\frac{1}{2}\pi|\alpha_l|^{-1}$ 时收斂，(22) 式的級数当 $|z|<\pi|\alpha_l|^{-1}$ 时收斂，其中 α_l 系由 1-13(31) 式所定义．又在 (21) 及 (22) 式中 m 为一正整数，$\alpha_1\cdots\alpha_m$ 为任意参数．在 $m=1$，$\alpha_1=1$ 的特殊情况下，上二式就簡化为 1-14 中所討論的式子．

顯然由式 (21)，(22) 及 1-13(35)，得

(23) $E_n^{(m)}(\alpha_1\cdots\alpha_m)=2^n E_n^{(m)}(\xi|\alpha_1\cdots\alpha_m)$.

$-m(m=1,2,3,\cdots)$ 階的欧拉数及欧拉多項式分別定义为

(24) $$2^{-m}e^{-z(\alpha_1+\cdots+\alpha_m)}[(e^{2\alpha_1 z}+1)\cdots(e^{2\alpha_m z}+1)]$$
$$=\mathrm{ch}\,(\alpha_1 z)\cdots\mathrm{ch}\,(\alpha_m z)=\sum_{n=0}^{\infty}E_n^{(-m)}(\alpha_1\cdots\alpha_m)z^n/n!,$$

(25) $$2^{-m}e^{xz}(e^{\alpha_1 z}+1)\cdots(e^{\alpha_m z}+1)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}E_n^{(-m)}(x|\alpha_1\cdots\alpha_m)z^n/n!;$$

两个展开式在整个 z 平面上均收斂．更詳細的討論可参看 Nörland 的 1922 及 1924 年著作第 6 章．对于 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_m=1$ 的情形在 Milne-Thomson 1933 年的著作第 6 章中有詳細說明．

1-15. 某些与柏努利及欧拉多項式有关的積分公式

从上两節里可以導出若干个積分关系式．首先，1-13(1) 式可寫成如下形式：

(1) $$(e^z-1)^{-1}-z^{-1}+\tfrac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}B_{2n}z^{2n-1}/(2n)! \qquad |z|<2\pi.$$

如果 B_{2n} 以 1-13(24) 及 1-13(27) 式代替，则

(2) $$(e^z-1)^{-1}=z^{-1}-\tfrac{1}{2}+2\int_0^{\infty}(e^{2\pi t}-1)^{-1}\sin(tz)\,dt,$$
$$|\mathrm{Im}\,z|<2\pi,$$

(3) $$(e^{2z}-1)^{-1}=(2z)^{-1}-\tfrac{1}{2}+\pi z^{-1}\int_0^{\infty}\sin^2(tz)\,\mathrm{csch}^2(\pi t)\,dt$$
$$|\mathrm{Im}\,z|<\pi.$$

如果 1-13(2) 式中的 $B_r(x)$ 以 1-13(20) 及 1-13(21) 式代替，1-14(2) 式中的 $E_r(x)$ 以 1-14(19) 及 1-14(20) 式代替，则

(4) $$\frac{e^{xz}}{e^z-1}=\frac{1}{z}+\int_0^\infty \frac{\cos(2\pi x)-e^{-2\pi t}}{\text{ch}(2\pi t)-\cos(2\pi x)}\sin(tz)\,dt$$
$$-\int_0^\infty \frac{\sin(2\pi x)}{\text{ch}(2\pi t)-\cos(2\pi x)}\cos(tz)\,dt$$
$$0\leqslant x<1,\quad |\text{Im}\,z|<2\pi,$$

(5) $$\frac{e^{xz}}{e^z+1}=2\int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)\,\text{ch}(\pi t)}{\text{ch}(2\pi t)-\cos(2\pi x)}\cos(tz)\,dt$$
$$-2\int_0^\infty \frac{\cos(\pi x)\,\text{sh}(\pi t)}{\text{ch}(2\pi t)-\cos(2\pi x)}\sin(tz)\,dt$$
$$0\leqslant x<1,\quad |\text{Im}\,z|<\pi.$$

1-16. 高 γ 函数

我們定义

(1) $$\psi^{(n)}(z)=\frac{d^{n+1}\ln\Gamma(z)}{dz^{n+1}}=\frac{d^n\psi(z)}{dz^n},\quad \psi^{(0)}(z)=\psi(z)$$
$$n=1,2,3,\cdots$$

(2) $$G^{(n)}(z)=\frac{d^nG(z)}{dz^n},\quad G^{(0)}(z)=G(z)\qquad n=1,2,3,\cdots$$

下面的函数方程是 1-7-1 及 1-8 節結果的推論:

(3) $$\psi^{(n)}(z)-\psi^{(n)}(1+z)=(-1)^{n+1}n!/z^{n+1},$$

(4) $$\psi^{(n)}(z)-(-1)^n\psi^{(n)}(1-z)=-\pi\frac{d^n}{dz^n}[\text{ctn}(\pi z)],$$

(5) $$\psi^{(n)}(mz)=m^{-n-1}\sum_{r=0}^{m-1}\psi^{(n)}(z+r/m)\qquad m=1,2,3,\cdots,$$

(6) $$2^nG^{(n)}(z)=\psi^{(n)}(\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{2})-\psi^{(n)}(\tfrac{1}{2}z),$$

(7) $$G^{(n)}(1+z)+G^{(n)}(z)=2(-1)^n n!/z^{n+1},$$

(8) $$G^{(n)}(z)+(-1)^nG^{(n)}(1-z)=2\pi\frac{d^n}{dz^n}[\csc(\pi z)].$$

我們还有如下的表达式

(9) $$\psi^{(n)}(z)=(-1)^{n+1}n!\sum_{r=0}^\infty(z+r)^{-n-1}$$
$$=(-1)^{n+1}n!\,\zeta(n+1,z),$$

(10) $$G^{(n)}(z)=2(-1)^n n!\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r(z+r)^{-n-1}$$
$$=2(-1)^n n!\ \Phi(-1,n+1,z).$$
因此，如果我們將函数 ζ 及 Φ 用它們对应的積分表示式來代替，就可將 $\psi^{(n)}(z)$ 及 $G^{(n)}(z)$ 表示为定積分.

1-17. $\ln\Gamma(1+z)$, $\psi(1+z)$, $G(1+z)$ 及 $\Gamma(z)$ 的几个展开式

$\ln\Gamma(1+z)$ 的台劳展开式为

(1) $$\ln\Gamma(1+z)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{d^m\ln\Gamma(1+z)}{dz^m}\right]_{z=0}\frac{z^m}{m!}$$
$$=z\psi(1)+\sum_{m=2}^{\infty}z^m/m!\ [\psi^{(m-1)}(1+z)]_{z=0}$$

或

(2) $$\ln\Gamma(1+z)=-\gamma z+\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^m\zeta(m)z^m/m \qquad |z|<1,$$

[見 1-16(9) 及 1-12(1)]

取 $z=1$，則得欧拉常数表达式

(3) $$\gamma=\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^m\zeta(m)/m$$

如果在[見 1-7(3)]

(4) $$\psi(1+z)=-\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{z+n}\right)$$

中展开

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{z+n}=\frac{z}{n^2}-\frac{z^2}{n^3}+\frac{z^3}{n^4}-\cdots \qquad |z|<1,$$

則得

(5) $$\psi(1+z)=-\gamma+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\zeta(n)z^{n-1} \qquad |z|<1.$$

同理，由 1-8(6) 式得

(6) $$G(1+z)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma(n)z^{n-1}$$
$$=2\sigma(1)+2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}(1-2^{1-n})\zeta(n)z^{n-1}$$

其中 $|z|<1$, $\sigma(1)=\ln 2$, 对于 $n>1$, $\sigma(n)=\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}/r^n$ $=(1-2^{1-n})\zeta(n)$.

如果我們应用(5)及(6)式作表达式 $\psi(1+z)+\psi(1-z)$, 及 $G(1+z)+G(1-z)$, 并注意 1-8(7), 1-8(8), 1-7(10)及1-7(11)各式,則得

$$(7)\qquad \psi(1+z)=(2z)^{-1}-\gamma-(\pi/2)\operatorname{ctn}(\pi z)-\sum_{n=1}^{\infty}\zeta(2n+1)z^{2n}\qquad |z|<1,$$

$$(8)\qquad G(1+z)=z^{-1}-\pi\csc(\pi z)+2\sigma(1)+2\sum_{n=1}^{\infty}(1-2^{-2n})\times\zeta(2n+1)z^{2n}\qquad |z|<1.$$

应用 1-7(1) 式,由(7)得

$$(9)\qquad \ln\Gamma(1+z)=-\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin\pi z}{\pi z}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(2n+1)}{2n+1}z^{2n+1}-\gamma z,$$

或者利用級数

$$\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1},$$

可得

$$(10)\qquad \ln\Gamma(1+z)=\tfrac{1}{2}\left\{\ln\left[\frac{\pi z}{\sin(\pi z)}\right]-\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right\}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\zeta(2n+1)}{2n+1}z^{2n+1}+(1-\gamma)z.$$

公式(9)及(10)在 $|z|<1$ 时正确.

最后,我們来導出 $\Gamma(z)$ 及 $\psi(z)$ 在靠近 $z=-m(m=0,1,2\cdots)$ 处的表达式. 由 1-2(6) 式有

$$\Gamma(z)=\pi(-1)^m/\{\Gamma(1-z)\sin[\pi(z+m)]\}.$$

將 $1/\Gamma(1-z)$ 在靠近 $z=-m$ 处展开为台劳級数,并利用 1-13(36) 式得

$$(11)\qquad \Gamma(z)=[(-1)^m/m!]\{(z+m)^{-1}+\psi(m+1)+\tfrac{1}{2}(z+m)[\pi^2/3+\psi^2(m+1)-\psi'(m+1)]+O[(z+m)^2]\}.$$

同样，由 1-7(11)，1-13(31) 及 1-16(9) 有

$$(12)\quad \psi(z)=-(z+m)^{-1}+\psi(m+1)+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(-1)^{n}\zeta(n)+\sum_{r=1}^{m}r^{-n}\right](z+m)^{n-1}.$$

1-18. 渐近展开式

在 1-9(5) 中，將積分号下括号內的式子用 1-15(1) 的右边部分來代替．由于華特生預备定理的条件与此相合，故我們可以逐項積分而得出如下的漸近展开式（斯梯林級数）

$$(1)\quad \ln\Gamma(z)=(z-\tfrac{1}{2})\ln z-z+\tfrac{1}{2}\ln(2\pi)+\sum_{n=1}^{m}B_{2n}/[(2n-1)(2n)z^{2n-1}]+O(z^{-2m-1})\qquad |\arg z|<\pi.$$

这相当于

$$(2)\quad \Gamma(z)=e^{-z}e^{(z-\frac{1}{2})\ln z}(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{z^{-1}}{12}+\frac{z^{-2}}{288}-\frac{139z^{-3}}{51840}+O(z^{-4})\right]\qquad |\arg z|<\pi.$$

[公式(2)直接可以用最陡下降法由 1-6(2) 式的圍綫積分中導出．对于这种推導方法及 (1)，(2) 式的余項可参看 Watson, 1920, p. 1]．

由(1)及(2)式可導出許多漸近公式，如

$$(3)\quad \ln\Gamma(z+\alpha)=(z+\alpha-\tfrac{1}{2})\ln z-z+\tfrac{1}{2}\ln(2\pi)+O(z^{-1}),$$

$$(4)\quad \Gamma(z+\alpha)/\Gamma(z+\beta)=z^{\alpha-\beta}[1+\tfrac{1}{2}z^{-1}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1)+O(z^{-2})],$$

$$(5)\quad \lim_{|z|\to\infty}e^{-\alpha\ln z}\Gamma(z+\alpha)/\Gamma(z)=1.$$

与(3)式有关的式还有 (12)；与 (4) 有关的还有式 (13)．在 (3)，(4)，及(5)式中 α 及 β 是固定的任意复数，且 $-\pi<\arg z<\pi$．此外倘有

$$(6)\quad \lim_{|y|\to\infty}|\Gamma(x+iy)|e^{\frac{1}{2}\pi|y|}|y|^{\frac{1}{2}-x}=(2\pi)^{\frac{1}{2}}\qquad x,\ y\ 为实数.$$

由(1)可得 $\psi(z)$ 的漸近展开式

$$(7)\quad \psi(z)=\ln z-(2z)^{-1}-\sum_{n=1}^{m}B_{2n}z^{-2n}/(2n)+O(z^{-2m-2}),$$

积分式 1-10(4)中的被積函数可寫成[見 1-15(1)]

(8) $t^{s-1}e^{-vt}/(1-e^{-t})=t^{s-1}e^{-vt}\left[t^{-1}+\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}B_{2n}t^{2n-1}/(2n)!\right]$.

因此,对于大的$|v|$,当 $|\arg v|<\pi$ 时,由式 1-10(3) 可得$\zeta(s, v)$的漸近展开式如下:

(9) $$\zeta(s,v)=[1/\Gamma(s)]\{v^{1-s}\Gamma(s-1)+\tfrac{1}{2}v^{-s}\Gamma(s)$$
$$+\sum_{n=1}^{m}B_{2n}\Gamma(s+2n-1)/[(2n)!\,v^{2n+s-1}]+O(v^{-2m-s-1})\}$$
$$\operatorname{Re} s>1.$$

令 $s=(n+1)$ 则得 1-16(9) 式的 $\psi^{(n)}(z)$ 的漸近展开式.

最后,我們來導出白納特的 $\ln\Gamma(z)$ 漸近展开式. 在白納特第一表达式 1-9(4) 中,我們將被積式寫成

$$\tfrac{1}{2}e^{-tz}t^{-2}(e^{t}-1)^{-1}[e^{t}(t-2)+t+2]$$
$$=\tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n}e^{-tz}/[(n+2)!\ (e^{t}-1)],$$

此系將上式左面的分子上的 e^t 用它的冪級数代替而得. 因为,根据 1-10(3)

$$\int_0^{\infty}t^{n}e^{-tz}(e^{t}-1)^{-1}dt=\Gamma(n+1)\zeta(n+1,\ z+1),$$

可得

(10) $$\ln\Gamma(z)=(z-\tfrac{1}{2})\ln z-z+\tfrac{1}{2}\ln(2\pi)$$
$$+\tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n-2)}\zeta(n+1,\ z+1).$$

这就是白納特公式.

一个收斂得較快的类似公式为下面的貝沙特公式(Wilton, 1922, p. 90):

(11) $$\ln\Gamma(z)=(z-\tfrac{1}{2})\ln(z-\tfrac{1}{2})-z-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\ln(2\pi)$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\zeta(2n,\ z)/[2^{2n}2n(2n+1)]\qquad \operatorname{Re} z\geqslant-\tfrac{1}{2},$$

由(3)及(4)的左边部分可得完全漸近展开式,为

(12) $\ln\Gamma(z+\alpha)=(z+\alpha-\frac{1}{2})\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)$

$$+\frac{B_2(\alpha)z^{-1}}{1\cdot 2}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}B_{n+1}(\alpha)z^{-n}}{n(n+1)}+O(z^{-n-1})$$

$$|\arg z|<\pi,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

(13) $$\Gamma(z+\alpha_1)\Gamma(z+\alpha_2)/[\Gamma(z+\beta_1)\Gamma(z+\beta_2)]$$

$$=z^{\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2}\left[1+\frac{c_1}{z+1}+\frac{c_2}{(z+1)(z+2)}+\cdots\right]$$

$$|\arg z|<\pi.$$

上面二个公式可分别見 Barnes, 1899, p. 64 及 Van Engen, 1938.

1-19. 米林-巴尼斯積分

被積式包含 γ 函数的所有積分中最重要的一个就是所謂米林-巴尼斯積分．这种積分最先系由 S. 品卡里在 1888 年所提出；它的理論則由 H. 米林加以發展 (1910, 其中參考到更早的作品)，而为 E. W. 巴尼斯所应用，以求超比微分方程的完全積分．还可参看 2-1-3 節

積分

(1) $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(a_1+A_1s)\cdots\Gamma(a_m+A_ms)}{\Gamma(c_1+C_1s)\cdots\Gamma(c_p+C_ps)}\times\frac{\Gamma(b_1-B_1s)\cdots\Gamma(b_n-B_ns)}{\Gamma(d_1-D_1s)\cdots\Gamma(d_q-D_qs)}z^s\,ds$$

是一个标准型的米林-巴尼斯積分．可以假設 γ 是实数，所有的 A_j, B_j, C_j, D_j 都是正数，積分的路綫为一直綫，与虛軸平行，而且在必要时可以具有刻鑿，借以通过被積式的几个極．这里的討論是根据迪克斯恩及斐勒(1936)的研究來提出的．

我們將应用下面的記法：

(2) $$\alpha=\sum_{j=1}^{m}A_j+\sum_{j=1}^{n}B_j-\sum_{j=1}^{p}C_j-\sum_{j=1}^{q}D_j$$

(3) $$\beta=\sum_{j=1}^{m}A_j-\sum_{j=1}^{n}B_j-\sum_{j=1}^{p}C_j+\sum_{j=1}^{q}D_j$$

(4) $$\lambda=\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{m}a_j-\tfrac{1}{2}m+\sum_{j=1}^{n}b_j-\tfrac{1}{2}n-\sum_{j=1}^{p}C_j+\tfrac{1}{2}p-\sum_{j=1}^{q}d_j+\tfrac{1}{2}q\right)$$

$$(5)\qquad \rho=\prod_{j=1}^{m}(A_j)^{A_j}\prod_{j=1}^{n}(B_j)^{-B_j}\prod_{j=1}^{p}(C_j)^{-C_j}\prod_{j=1}^{q}(D_j)^{D_j}.$$

(1)式的收斂性可以用 γ 函数的漸近式 1-18(6) 来檢驗. 設

$$s=\sigma+it\ (\sigma, t\ \text{实数}),\ z=\mathrm{R}\,e^{i\phi}\ (R>0,\ \phi\ \text{为实数})$$

当 $|t|$ 很大时，被積式的絕对値可以和下式比較

$$(6)\qquad e^{-\frac{1}{2}\alpha\pi|t|}|t|^{\beta\gamma+\lambda}R^{-\gamma}e^{\phi t}\rho^{\gamma}.$$

積分(1)的收斂可有四种形式:

第一种形式: $\alpha>0$. 当 $|\phi|<\alpha\pi/2$ 时，積分(1)絕对收斂，并定义了一个在扇形 $|\arg z|<\min(\pi, \alpha\pi/2)$ 内解析的函数（点 $z=0$ 当然是除外的）.

第二种形式: $\alpha=0$, $\beta\neq0$. 对于复数 z, 積分 (1) 并不收斂. 对于 $z>0$, 如果选擇 γ 使

$$(7)\qquad -\beta\gamma>1+\lambda,$$

則積分(1)絕对收斂;并存在有 z 的这样一个解析函数，它定义于整个 $|\arg z|<\pi$ 的区域中，積分式(1)就是这个解析函数当 z 为正时的值.

第三种形式: $\alpha=\beta=0$, $\lambda<-1$. 此处对于任意的 γ, 式(7)都成立. 对于所有正的 z（但不是复数的 z）積分都絕对收斂，并表示 z $(0<z<\infty)$ 的一个連續函数. 現在这里有两个解析函数，其中一个在 $|\arg z|<\pi$, $|z|>\rho$ 所包含的任何区域中正則，它在 $z>\rho$ 时的值由式(1)表示；另一个在 $|\arg z|<\pi$, $0<|z|<\rho$ 所包含的任何区域中正則，它在 $0<z<\rho$ 时的值由式(1)表示. 这二个函数一般是有区别的.

第四种形式: $\alpha=\beta=0$, $-1\leqslant\lambda<0$. 对于 $0<z<\rho$, 及 $z>\rho$, 積分是收斂的（虽然不是絕对收斂）. 这里也有两个解析函数，情形与上節一样. 当 $z=\rho$ 时，發生間断，因此这时的積分不存在，虽然它还可以有一个主值. 关于間断及主值的性質在迪克斯恩和斐勒的著作中有說明.

类似結構的重積分并不常見.

下面一式可作为米林-巴尼斯型積分的例子 (Whittaker-Watson, 1927, p. 289):

(8) $$\int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)\,ds$$
$$=2\pi i\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}.$$

積分的路徑是刻劃的，使 $\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)$ 的極位于路徑的右边，$\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)$ 的極位于路徑的左边，而 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 的值是这样选定的，使第一組中沒有一个極和第二組中的任何一極相重。(其他的例子見 2-1(15) 和 7-3-6 節及 Ramanujan, 1927, p.216).

1-20. 几个三角函数的冪級数

由 1-13(1) 可以導出一系列的三角展开式(还可参看 Schwatt 得出的类似展开式，1932)，例如：

(1) $$z\coth z=2z(e^{2z}-1)^{-1}+z=\sum_{n=0}^{\infty}2^{2n}B_{2n}z^{2n}/(2n)!$$
$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\zeta(2n)\pi^{-2n}z^{2n}\qquad |z|<\pi,$$

(2) $$\tanh z=2\coth(2z)-\coth z=\sum_{n=1}^{\infty}2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}z^{2n-1}/(2n)!$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2^{2n}-1)\zeta(2n)\pi^{-2n}z^{2n-1}\qquad |z|<\pi/2,$$

(3) $$z\operatorname{ctn} z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{2n}B_{2n}z^{2n}/(2n)!$$
$$=-2\sum_{n=0}^{\infty}\zeta(2n)\pi^{-2n}z^{2n}\qquad |z|<\pi,$$

(4) $$\tan z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}z^{2n-1}/(2n)!$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}(2^{2n}-1)\zeta(2n)\pi^{-2n}z^{2n-1}\qquad |z|<\pi/2,$$

(5) $$z/\sin z=z\left[\operatorname{ctn}\left(\tfrac{1}{2}z\right)-\operatorname{ctn} z\right]$$
$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-2^{2n-1})B_{2n}z^{2n}/(2n)!\qquad |z|<\pi,$$

(6) $\ln \cos z = -\int_0^z \tan z \, dz$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2^{2n}-1) 2^{2n-1} B_{2n} z^{2n} / [n (2n)!], \quad |z| < \pi/2.$$

如我們寫出

(7) $\tan z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} C_{2n+1} z^{2n+1} / (2n+1)! \qquad |z| < \pi/2,$

(8) $z/\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n D_{2n} z^{2n} / (2n)! \qquad |z| < \pi,$

則和(4)及(5)比較一下可得

(9) $C_{2n-1} = 2^{2n} (1-2^{2n}) B_{2n} / (2n),$

(10) $D_{2n} = 2(1-2^{2n-1}) B_{2n}.$

C_{2n-1} 及 D_{2n} 的積分表达式可以从1-13(24)至1-13(28)式中得出.

較上列各式更普遍的展开式可以从1-13-1及1-14-1節的結果中得出(Nörland, 1922, p. 196). 下面是二个例子:

(11) $\cos (mt) (t/\sin t)^m = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2t)^{2n} B_{2n}^{(m)} / (2n)!,$

(12) $\sin (mt) (t/\sin t)^m = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (2t)^{2n+1} B_{2n+1}^{(m)} / (2n+1)!,$

上列二式在 $|t| < \pi$ 时收斂. 用1-13(1)式的記法,得

(13) $B_l^{(m)} = B_l^{(m)}(\alpha_1 \cdots \alpha_m) \qquad \alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 1.$

1-21. 几种另外的記法及符号

γ 函数的另外几种記法及有关符号为(見1-2):

(1) (階乘函数) $\Pi(z) = z! = \Gamma(z+1);$

(2) $\gamma = $1-1(4)的欧拉常数;

(3) (亨克尔符号)

$$(v, n) = 2^{-2n} \{(4v^2-1)(4v^2-3^2) \cdots [4v^2-(2n-1)^2]\} / n!$$
$$= \Gamma(\tfrac{1}{2}+v+n) / [n! \Gamma(\tfrac{1}{2}+v-n)] \qquad n = 1, 2, 3, \cdots;$$

(4) (克倫濱符号)

$$C^{a/b}=c(c+b)(c+2b)\cdots[c+(a-1)b]$$
$$=b^{a-1}\Gamma(a+c/b)/\Gamma(c/b)\qquad a=2,3,4\cdots;$$

(5) （波奇亨牟符号）

$$(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)=\Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha)$$
$$n=1,2,3,\cdots$$

(6) （二項系数）

$$\binom{a}{m}=(-1)^m\Gamma(m-\alpha)/[m!\Gamma(-\alpha)]$$
$$=\Gamma(1+\alpha)/[m!\Gamma(1+\alpha-m)].$$

通常，柏努利数 B_n 常以如下的展开式來定义：

(7) $$\tfrac{1}{2}z+z(e^z-1)^{-1}=\tfrac{1}{2}z\coth\left(\tfrac{1}{2}z\right)$$
$$=1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n B_n z^{2n}/(2n)!.$$

由 1–13(1) 及 1–13(16) 式可知，这样定义的 B_n 为：

(8) $$B_n=2(2n)!(2\pi)^{-2n}\sum_{r=1}^{\infty}r^{-2n}$$

从而

(9) $B_1=1/6,\ B_2=1/30,\ B_3=1/42\ \ B_4=1/30,\cdots$

柏努利多項式常以 $\Phi_n(x)$ 來表示，并定义为：

(10) $$z(e^{xz}-1)/(e^z-1)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(x)z^n/n!.$$

用我們 1–13(2) 的記法，有

(11) $\Phi_n(x)=B_n(x)-B_n(0)$

因而，由 1–13(3)

(12) $\Phi_1(x)=x,\quad \Phi_2(x)=x^2-x,\quad \Phi_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x.$

如果欧拉数 E_n 定义为：

(13) $$\operatorname{sech} z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n E_n z^{2n}/(2n)!,$$

則由 1–14(1) 及 1–14(14) 式，顯然有

(14) $$E_n=2(2n)!(2/\pi)^{2n+1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^r(2r+1)^{-2n-1}.$$

参考文献

Barnes, E. W., 1899: *Messenger of Math.* 29, 64-128.

Barnes, E. W., 1906: *Proc. London Math. Soc.* (2) 4, 284-316.

Barnes, E. W., 1908: *Proc. London Math. Soc.* (2) 6, 141-177.

Böhmer, Eugen 1939: *Differenzengleichungen und bestimmte Integrale*, Leipzig.

Bromwich, T. J. I'a., 1947: *An introduction to the theory of infinite series*, Macmillan and Co., Ltd., London.

Bruijn, N. G., 1937: *Mathematica, Zutphen* B5, 170-180.

Dixon, A. L. and W. L. Ferrar, 1936: *Quart. J. Math., Oxford Ser.* 7, 81-96.

Engen, van H., 1938: *Tohoku Math. J.* 45, 124-129.

Fort, Tomlinson, 1948: *Finite differences*, Oxford.

Hardy, G. H., 1949: *Divergent series*, Cambridge.

Hardy, G. H., 1912: *Quart. J. Math.* 43, 215-216.

Hölder, Otto, 1928: *Ber. Verb. Sächs, Akad. Wiss. Math. Phys. Kl* 80, 312-325.

Hutchinson, J. I. 1925: *Trans. Amer. Math. Soc.* 27, 49-60.

Hutchinson, J. I. 1929: *Trans. Amer. Math. Soc.* 31, 222-344.

Ingham, A. E. 1932: *The distribution of prime numbers*, Cambridge.

Kluyver, J. C., 1927: *Quart. J. Math.* 50, 185-192.

Lichtenbaum, Paul, 1931: *Math. Z.*, 33, 641-647.

Lindelöf Ernst, 1905: *Le Calcul des Résidus*, Gauthier-Villars.

Mellin, H. J., 1910: *Math. Ann.* 68, 305-337.

Milne-Thomson, L. M., 1933: *The calculus of finite differences*, Macmillan and Co. Ltd. London.

Nielsen, Niels, 1906: *Handbuch der Theorie der Gamma Funktion*, B. G. Teubner, Leipzig.

Nielsen, Niels, 1923: *Traile élémentaire des nombres de Bernoulli*, Gauthier-Vielars

Nörlund, N. E., 1922: *Acta Math.* 43, 121-196.

Nörlund, N. E., 1924: *Vorlesungen über Differenzenrechnung*, Springer.

Ramanujan, Srinivasa, 1927: *Collected papers*, Cambridge.

Rasch, G., 1931: *Ann. of Math.* 32, 591-599

Rogers, L. S., 1905: *proc. London. Math. Soc.* 4, 169-189.

Rowe, C. H., 1931: *Ann. of Math.* 32, 10-16.

Sandham, H. F., 1949: *J. London Math. Soc.* 24, 88–91.

Schwatt, I. S., 1932: *J. Math. Pure Appl. IX*, 143-151.

Shastri, N. A., 1938: *Philos. Mag.*, 25, 930–950.

Titchmarsh, E. C., 1930: *The zeta function of Riemann*, Cambridge.

Titchmarsh, E. C., 1935: *Proc. Roy. Soc. London*, 151, 234–255.

Titchmarsh, E. C., 1936: *Proc. Roy. Soc. London*, 157, 261–263.

Tricomi, Francesco, 1950: *Rend. Semin. Mat. Torino*, 9, 343–351.

Truesdell, C. A., 1945: *Ann. of Math.* 46, 114–157.

Watson, G. N,, 1920: *Quart. J. of Pure and Appleid Math.* 48, 1–18.

Whittaker, E. T., and G. N. Watson, 1927: *A course of modern analysis*, Cambridge.

Wilton, F. R., 1922: *Messenger of Math* 52, 92–93.

第二章　超比函数

第一部分：理論部分

2-1．超比級数

2-1-1．超比方程

如果一个二階齐次綫性微分方程至多能有三个奇点，則我們可假設这三个奇点在 0, ∞, 1．如果所有这些奇点都是"正則"的（見 Poole, 1936），則方程可簡化成如下形式（見 Poole, 1936）：

(1)　$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+[c-(a+b+1)z]\frac{du}{dz}-abu=0.$$

其中 a, b, c 不依賴于 z．这就是**超比方程**．我們称 a, b, c 为方程的参数；它們都是任意的复数．

我們定义

$$(a)_n=\Gamma(a+n)/\Gamma(a),$$

即　$(a)_0=1,\ (a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1)\quad n=1, 2, 3, \cdots,$

如 $c\neq 0, -1, -2, \cdots$，則

(2)　$$u_1=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n(b)_n z^n/[(c)_n n!]\equiv {}_2F_1(a, b; c; z)\equiv F(a, b; c; z)$$

是 (1) 的解，在 $z=0$ 处正則．

如 $c=-n$，其中 $n=0, 1, 2, \cdots$ 則

(3)　$$u_1=z^{n+1}\sum_{m=0}^{\infty}(a+n+1)_m(b+n+1)_m z^m/[(n+2)_m m!]$$

$$=z^{n+1}\,{}_2F_1(a+n+1,\ b+n+1;\ n+2;\ z)$$

就是这样的一个解．函数 ${}_2F_1(a, b; c; z)$ 称为变量 z 与参量 a, b, c 的超比級数．如果在我們的研究中并沒有其他形式的廣义超比級数（見第四、第五章），則 ${}_2F_1$ 的下标一般都可以不寫．

在 $c=-m\ (m=0, 1, 2, \cdots)$ 的情况下，式 (2) 变为無意义．我們对这种情况下的超比級数將补加定义．

如 $a=-n$, 或 $b=-n$, 其中 $n=0, 1, 2, \cdots$, 又如 $c=-m$, 其中 $m=n, n+1, n+2, \cdots$ 则我們定义:

$$(4)\quad \begin{cases} F(-n, b; -m; z)=\sum_{r=0}^{n}(-n)_r(b)_r z^r/[(-m)_r r!], \\ F(a, -n; -m; z)=\sum_{r=0}^{n}(a)_r(-n)_r z^r/[(-m)_r m!]. \end{cases}$$

由于 (3) 及 (4) 均为 (1) 的解,故知超比方程有一个解,它是 z 的一个多项式,只要 $-a$ 或 $-b$ 是一个非負的整数(如 $a=-m$ 或 $b=-m$, 且 $c=-n$, 其中 $n=0, 1, 2, \cdots$, 且 $m=n+1, n+2, \cdots$, 则 (3) 中的級数是有尽的).

如 a 及 b 不为 $0, -1, -2, \cdots$, 则对于所有的 $|z|<1$, 超比級数 (2) [在 $c=-n$ 的情况下,为 (3)] 絕对收斂. 因为运用 1-18 (4), 有

$$(5)\quad \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)}\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(n+1)}$$

$$=\frac{\Gamma(c)\Gamma(1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}n^{a+b-c-1}[1+O(n^{-1})],$$

由雷皮檢驗法(見 Bromwich 1947, pp. 39, 241) 可知对于 $|z|=1$,

如 $Re(a+b-c)<0$, 当 $|z|=1$ 时絕对收斂,

如 $0\leqslant Re(a+b-c)<1$, 当 $|z|=1$, $z\neq1$ 时条件地收斂,

如 $|z|=1$, $1\leqslant Re(a+b-c)$, 發散.

2-1-2. 基本关系

由定义式 (2), 得

$$F(a, b; c; z)=F(b, a; c; z).$$

六个如下的函数

$$F(a\pm1, b; c; z),\quad F(a, b\pm1; c; z),\quad F(a, b; c\pm1; z)$$

称为函数 $F(a, b; c; z)$ 的鄰接函数. 在 $F(a, b; c; z)$ 及任何二个鄰接于它的函数之間存在着一个綫性关系,关連系数为 z 的綫性函数. 这种形式的关系經高斯發現的有 15 个. 其全部見 2-8 (31) 式至 2-8 (45) 式. 其中一个关系式为

(6) $cF(a, b-1; c; z)+(a-b)zF(a, b; c+1; z)$

$$=cF(a-1, b; c; z).$$

要証明式 (6)，可將二边都展成冪級数. 于是 (6) 式左边的 z^n 的系数为

$$c\frac{(a)_n(b-1)_n}{(c)_n n!}+(a-b)\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c+1)_{n-1}(n-1)!}$$

$$=\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c+1)_{n-1}(n-1)!}[a-b+(b-1)(a+n-1)/n]$$

$$=\frac{c(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_n n!}(a-1)(b+n-1)=c\frac{(a-1)_n(b)_n}{(c)_n n!}.$$

这就証明了式 (6)

如 l, m, n 为整数，則 $F(a+l, b+m; c+n; z)$ 可以重复应用这些关系表达为 $F(a, b; c; z)$ 及其一个鄰接函数的綫性組合，其系数为 a, b, c, z 的有理函数.

当然，我們应該假定 c 及 $c+n$ 異于 $0, -1, -2, \cdots$. $F(a, b; c; z)$ 及 $F(a+l, b+m; c+n; z)$ 称为連帶級数. 可以証明任何三个連帶級数只要第三个参数的値異于 $0, -1, -2, \cdots$, 均可用一个系数为多項式的綫性齐次关系連系起來 (見 Poole, 1936, p. 91 *ff*).

又

(7) $$\frac{d^n}{dz^n}F(a, b; c; z)=(a)_n(b)_n[(c)_n]^{-1}F(a+n, b+n; c+n; z),$$

(8) $$(a)_n z^{a-1}F(a+n, b; c; z)=\frac{d^n}{dz^n}[z^{a+n-1}F(a, b; c; z)],$$

(9) $(c)_n z^{c-1}(1-z)^{a+b-c}F(a, b; c; z)$

$$=\frac{d^n}{dz^n}[z^{n+c-1}(1-z)^{n+a+b-c}F(a+n, b+n; c+n; z)].$$

关系式 (9) 是雅可比所創立 (1859). 这种关系的全部見 2–8 (20) 至 2–8 (27) 式. 要証明 (8) 及 (9)，我們用算符

$$\delta=z\frac{d}{dz}, \quad D=\frac{d}{dz}.$$

則 $$aF(a+1, b; c; z)=(\delta+a)F(a, b; c; z)$$

因为对于每一个解析函数 $f(z)$，(見 Poole, 1936, p. 93)

$$(\delta+a)(\delta+a+1)\cdots(\delta+a+n-1)f(z)$$
$$=z^{1-a}D^n[z^{a+n-1}f(z)],$$

这就証明了 (8).

要求得 (9)，可將 (1) 式寫成如下形式

$$D[z(1-z)MDu]=abMu$$

其中 $M=z^{c-1}(1-z)^{a+b-c}$. 根据式 (7)，$D^{n-1}F(a, b; c; z)$滿足于以 $a+n-1$, $b+n-1$, $c+n-1$ 代替 a, b, c 的超比方程，由此可得如下的遞推关系

$$D[z^n(1-z)^nMD^nF]$$
$$=(a+n-1)(b+n-1)[z(1-z)]^{n-1}MD^{n-1}F.$$

因而

$$D^n[z^n(1-z)^nMD^nF]=(a)_n(b)_nMF.$$

再应用(7)并假定F不是一个低于 n 次的多项式，即 $(a)_n(b)_n\neq 0$，最后就可得出 (9) 式.

黎曼方程(見 2–6–1 節及 Poole, 1936)的一般理論指出，在通常的情况下 (1) 式应有 24 个解，其形式如下:

$$z^\rho(1-z)^\sigma F(a', b'; c'; z')$$

其中 ρ, σ, a', b', c' 是 a, b, c 的綫性函数，z 及 z' 是由一个对应变换所联系的. 这 24 个解(由康曼尔作出)可参看戈尔薩特的著作 (1881)，及本書的 2–9 (1) 至 2–9 (24). 这些解中的任何三个皆以一个常系数綫性关系联系起來，这种关系可参看戈尔薩特的著作(1881)及本書的 2–9 (25) 至 2–9 (44). 超比級数的解析开拓要应用这些关系，其証明見 2–1–4.

2–1–3. 基本積分表示式

如 $Re\, c>Re\, b>0$，則得欧拉公式:

(10) $$F(a, b; c; z)$$
$$=\Gamma(c)[\Gamma(b)\Gamma(c-b)]^{-1}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt.$$

上式右边部分是区域 $|\arg(1-z)|<\pi$ 内 z 的一个單值解析函数；因此(10)式也給出了 $F(a, b; c; z)$ 的解析开拓．对于 $|z|<1$，要証明式 (10) 可將 $(1-tz)^{-a}$ 展开为二項級数并逐項積分；这就導出了 β 積分，它可用1–5 (1) 式至 1–5 (5) 式來計值．

由下面的恆等式

$$\text{(11)}\quad \left\{z(1-z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+[c-(a+b+1)z]\frac{\partial}{\partial z}-ab\right\}[t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}]$$
$$=-a\frac{\partial}{\partial t}[t^b(1-t)^{c-b}(1-tz)^{-a-1}]$$

可知 (10) 式中的右边部分滿足式(1)．以 $s=-t$，如 $\operatorname{Re} b>0$，$\operatorname{Re}(a+1-c)>0$，且 $|\arg z|<\pi$，則

$$\int_0^\infty s^{b-1}(1+s)^{c-b-1}(1+sz)^{-a}ds$$

为 (1) 式的一个解．以 $s=r/(1-r)$，这变成

$$\int_0^1 r^{b-1}(1-r)^{a-c}[1-r(1-z)]^{-a}dt,$$

因而

$$\text{(12)}\quad F(a, b; a+b+1-c; 1-z)$$
$$=\Gamma(a+b+1-c)[\Gamma(b)\Gamma(a+1-c)]^{-1}$$
$$\times\int_0^\infty s^{b-1}(1+s)^{c-b-1}(1+sz)^{-a}ds$$

也是超比方程的一个解．不僅如此，任一積分

$$\int_C t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt$$

只要 C 在被積表达式的黎曼面上封閉或終于 $t^b(1-t)^{c-b}(1-tz)^{-a-1}$ 的零点上，都將为 (1) 式的一个解．將 $(1-tz)^{-a}$ 展开为二項級数并应用 1–6 (6) 至 1–6 (8) 的 β-函数的圍綫積分公式，可得

$$F(a, b; c; z)=\frac{i\Gamma(c)\exp[i\pi(b-c)]}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)2\sin\pi(c-b)}$$
$$\times\int_0^{(1^+)} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt$$
$$\operatorname{Re} b>0,\ |\arg(1-z)|<\pi,\ c-b\neq 1, 2, 3, \cdots$$

$$F(a, b; c; z)=\frac{-i\Gamma(c)\exp(-i\pi b)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)2\sin\pi b}$$
$$\times\int_1^{(0^+)} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt$$
$$\operatorname{Re} c>\operatorname{Re} b,\ |\arg(-z)|<\pi,\ b\neq 1, 2, 3\cdots$$

(13) $$F(a, b; c; z)=\frac{-\Gamma(c)\exp(-i\pi c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)4\sin\pi b\sin\pi(c-b)}$$
$$\times\int^{(1^+, 0^+, 1^-, 0^-)} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt$$
$$|\arg(-z)|<\pi,\quad b, 1-c, c-b\neq 1, 2, 3\cdots$$

在每一种情况下，我們都假定積分的圍道系从

$$t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}$$

的黎曼曲面上的一点开始的，这里的 t 为实数，$0\leqslant t\leqslant 1$，且 t^b，$(1-t)^{c-b}$ 均为这些函数的主值，同时 $(1-tz)^{-a}$ 是这样定义的：如 $z\to 0$ 則 $(1-tz)^{-a}\to 1$.

如令 $z=1$，則(10)式的右边部分变成一个 β 積分，由 1-5 (1) 及 1-5 (5) 式可得

(14) $$F(a, b; c; 1)=\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)[\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)]^{-1}$$
$$\operatorname{Re} c>\operatorname{Re} b>0,\ \operatorname{Re}(c-a-b)>0.$$

我們可以直接指明只要 $c\neq 0, -1, -2, \cdots$，且 $\operatorname{Re}(c-a-b)>0$，則式 (14) 是成立的．由遞推关系

$$(c-a)(c-b)zF(a, b; c+1; z)$$
$$=c[(2c-a-b-1)z-c+1]F(a, b; c; z)$$
$$+c(c-1)(1-z)F(a, b; c-1; z)$$

幷由 2-1-1 節 (5) 式下面的注解可知，对于 $m=1, 2, 3\cdots$ 只要

$$\lim_{z\to 1}(1-z)F(a, b; c; z)=0.\qquad \operatorname{Re}(c-a-b)>0,$$

則

$$F(a,b;c;1)=\frac{(c-a)(c-b)}{c(c-a-b)}F(a,b;c+1;1)$$
$$=\frac{(c-a)_m(c-b)_m}{(c)_m(c-a-b)_m}F(a,b;c+m;1).$$

如果这是正确的(如我們現在要証明的),則对于 $m\to\infty$, 將有

$$\lim_{m\to\infty}F(a,b;c+m;1)=1,$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{(c-a)_m(c-b)_m}{(c)_m(c-a-b)_m}=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$
$$\times\lim_{m\to\infty}\frac{\Gamma(c-a+m)\Gamma(c-b+m)}{\Gamma(c+m)\Gamma(c-a-b+m)},$$

这和 1-18 (4) 式共同可証明式 (14). 今当 $n\to\infty$ 时如果

$$v_n=\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n-1)\Gamma(n+1)}\ \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\to 0,$$

則当 $z\to 1$ 时有

$$(1-z)F(a,b;c-1;z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(v_n-v_{n-1})z^n\to 0.$$

根据 (5) 式可知,如 $\mathrm{Re}(c-a-b)>0$, 上面的关系是成立的.

超比級数積分表示式的第二个形式是由 E. W. 巴納斯所提出(1908), 它把超比函数的全部理論建基在下面的表示式上:

$$(15)\quad \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}F(a,b;c;z)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s ds.$$

其中 $|\arg(-z)|<\pi$, 且積分路徑在必要时,如在把被積函数在 $s=0,1,2,\cdots$ 上的極从 $s=-a-n$, $s=-b-n\,(n=0,1,2,\cdots)$ 上的極中分隔开來的情形下,是加以刻鑿的. 只要 a 和 b 都異于 $0,-1,-2,\cdots$ 則这样的一个積分路徑常是可以找出的. 当 $c=-n\ (n=0,1,2\cdots)$ 时, 如果我們定义

$$F(a,b;c;z)/\Gamma(c)$$

等于

(16) $(a)_{n+1}(b)_{n+1}z^{n+1}F(a+n+1, b+n+1; n+2; z)/(n+1)!$

則对于这样的 c，(15) 也保持正确.

要証明式 (15)，可注意在 $|z|<1$ 的情况下，式右边部分的積分可以用留数微積分表示为被積表达式在極 $s=0, 1, 2, \cdots$ 上的留数的和(見 1-18 節的漸近公式，这些公式說明了被積表达式在無窮大处的性态).

2-1-4. 超比級数的解析开拓

(10)，(13)，(15) 式中的積分定义了几个 z 的解析函数，它們在区域 $|\arg(-z)|<\pi$ 中都是單値的，也就是說除了正实軸上的点以外，在整个 z 平面上都是單値的，因而可用以实行 $F(a,b;c;z)$ 向区域 $|\arg(-z)|<\pi$ 的解析开拓. 我們仍以 $F(a, b; c; z)$ 表示 $F(a, b; c; z)$ 的这一解析开拓，因而它就代表超比級数所形成的解析函数的一个枝(主枝).

我們排除 a 或 b 等于 $0, -1, -2, \cdots$ 时的多項情形，而以 $c=0, -1, -2, \cdots$ 时的(16)式來定义 $F(a, b; c; z)/\Gamma(c)$. 用留数微積分把(15)式右边部分的積分表示为被積式在極 $s=-a-l$，$s=-b-k$ (其中 $k, l=0, 1, 2, \cdots$)上的留数之和，先設 $a-b$ 为非整数，因此这些極都是單極，得

(17)　$F(a, b; c; z)/\Gamma(c)$

$$=\Gamma(b-a)[\Gamma(b)\Gamma(c-a)]^{-1}(-z)^{-a}F(a, 1-c+a; 1-b+a; z^{-1})$$
$$+\Gamma(a-b)[\Gamma(a)\Gamma(c-b)]^{-1}(-z)^{-b}F(b, 1-c+b; 1-a+b; z^{-1})$$

其中 $a-b$ 为非整数，且 $|\arg(-z)|<\pi$.

如 $b=a+m$，此处 $m=0, 1, 2, \cdots$，則 (15) 式中的被積式在 $s=-a-k$ $(k=0, 1, \cdots, m-1)$ 上有單極(如 $m=0$，則就沒有單極)；而在 $s=-a-m-l$ $(l=0, 1, 2, \cdots)$ 上則有二階極，因而有

$$(18)\quad \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(c)}F(a, a+m; c; z)$$

$$=\frac{(-z)^{-a-m}}{\Gamma(c-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+m}(1-c+a)_{n+m}}{n!\,(n+m)!}z^{-n}[\ln(-z)+h_n]$$

$$+(-z)^{-a}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(a)_n\Gamma(m-n)}{\Gamma(c-a-n)n!}z^{-n}$$

$$a\neq 0,\ -1,\ -2,\ \cdots,\ m=0, 1, 2, \cdots,\ |\arg(-z)|<\pi,$$

且

$$h_n=\psi(1+m+n)+\psi(1+n)-\psi(a+m+n)-\psi(c-a-m-n)$$

$$=\psi(1+m+n)+\psi(1+n)-\psi(a+m+n)-\psi(1-c+a+m+n)$$

$$+\pi\operatorname{ctn}\pi(c-a).$$

如 $m=0$, 则 (18) 式中的和式 $\sum\limits_{n=0}^{m-1}$ 为零. 如 $c=a+m+l$, 其中 $l=0, 1, 2, \cdots$, 则 (18) 式只有在極限情形下才保持有效,其結果为

$$(19)\quad \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a+m+l)}F(a, a+m; a+m+l; z)$$

$$=(-1)^{m+l}(-z)^{-a-m}\sum_{n=l}^{\infty}\frac{(a)_{n+m}(n-l)!}{(n+m)!\,n!}z^{-n}$$

$$+\frac{(-z)^{-a-m}}{(l+m-1)!}\sum_{n=0}^{l-1}\frac{(a)_{n+m}(1-m-l)_{n+m}}{n!\,(n+m)!}z^{-n}[\ln(-z)+h_n']$$

$$+(-z)^{-a}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-n-1)!\,(a)_n}{(m+l-n-1)!\,n!}z^{-n}$$

$$a+m\neq 0,\ -1,\ -2,\ \cdots,\ |\arg(-z)|<\pi.$$

如果 $l=0$ 或 $m=0$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{l-1}$ 及 $\sum\limits_{n=0}^{m-1}$ 皆为零,且

$$h_n'=\psi(1+m+n)+\psi(1+n)-\psi(a+m+n)-\psi(1-n).$$

如果 $c-a$ 或 $c-b$ 为一負整数,则 $F(a, b; c; z)$便成为 z 的一个初等函数. 特別是我們有:

$$(20)\quad F(a, a+m; a+m-l; z)$$

$$=(1-z)^{-a-l}F(m-l,\ -l; a+m-l; z).$$

如 $l=0, 1, 2, \cdots$ 则上式中右边部分的超比級数是一多項式. 要

証明 (20)，我們注意到在欧拉積分 (10) 或 (12) 式中，如令

(21) $s=1-t,\quad (1-t)/(1-tz),\quad t(1-z+tz),$

就可轉換为同样形式的積分.

由此可得

(22) $$F(a,b;c;z)=(1-z)^{-a}F[a,c-b;c;z/(z-1)],$$
$$=(1-z)^{-b}F(c-a,b;c;z/(z-1)],$$

且

(23) $$F(a,b;c;z)=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c;z).$$

如果同时有 $|z|<1$, $|z/(z-1)|<1$, 則(22)式成立. 因为(22)式的右边部分是对 $\mathrm{Re}\,z<\frac{1}{2}$ 定义的，这就可用以獲得 $F(a,b;c;z)$ 向半平面 $\mathrm{Re}\,z<\frac{1}{2}$ 内的一个解析开拓. 当然，(23)式僅当 $|z|<1$ 时有效，除非 $a, b, c-a$ 或 $c-b$ 是一个非正的整数.

由 (17) 至 (23) 各式及各式的組合中(見 2-9 及 2-10 節)我們可得 $F(a,b;c;z)$ 向区域 $|\arg(1-z)|<1$ 内的完全的解析开拓. 結果，在任何点 $z=z_0$, 除非 $z_0=\exp(\pm i\pi/3)$, $F(a,b;c;z)$ 都可以从一个像几何級数一样收斂的級数來估定. 在这种情况下，(17)至(23)式中的所有級数可能只是条件地收斂或像一个 $\Sigma z^n n^{-k}$ (其中 k 为一个常数且 >1) 型的級数一样收斂.

2-1-5. 二次及三次变換

我們可以把(17)至(20)作为 $F(a,b;c;z)$ 的綫性变換來研究. 如果 a, b, c 都是無約束的，則不存在有較高次的变換(即变数由非綫性关系关联的变換).

当且僅当数

$$\pm(1-c),\quad \pm(a-b),\quad \pm(a+b-c)$$

中有一个等于 $\frac{1}{2}$, 或其中二个相等时方始存在有所謂二次变換. 二次变換的基本公式是高斯及康曼尔公式:

(24) $$F[a,b;2b;4z/(1+z)^2]=(1+z)^{2a}F(a,a+\tfrac{1}{2}-b;b+\tfrac{1}{2};z^2),$$

(25) $$F(a,b;1+a-b;z)$$
$$=(1-z)^{-a}F[\tfrac{1}{2}a,\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}-b;1-a+b;-4z/(1-z)^2],$$

$$(26)\quad F(a, a+\tfrac{1}{2}; b; z) = 2^{2a}[1+(1-z)^{\frac{1}{2}}]^{-2a}$$
$$\times F\{2a, 2a-b+1; b; [1-(1-z)^{\frac{1}{2}}]/[1+(1-z)^{\frac{1}{2}}]\},$$
$$(27)\quad F[a, b; a+b+\tfrac{1}{2}; 4z(1-z)] = F(2a, 2b; a+b+\tfrac{1}{2}; z),$$

在 (26) 式中，$(1-z)^{\frac{1}{2}}$ 是这样定义的：如果 z 为实数且 $z<1$，它是正数．由 (27) 及 2-10 (1) 可得一推論为：

$$(28)\quad F(2a, 2b; a+b+\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{2})$$
$$= \frac{\Gamma(a+b+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(b+\frac{1}{2})} F(a, b; \tfrac{1}{2}; z^2)$$
$$- z\frac{\Gamma(a+b+\frac{1}{2})\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(a+\tfrac{1}{2}, b+\tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}; z^2).$$

(24)至(28)式的两边的級数在 $z=0$ 的某鄰域内收斂，而这些公式在最大連通区域内有效，这个最大連通区包含点 $z=0$，且所論公式中的級数在該区域内均收斂．例如，如 $|z|<(2^{\frac{1}{2}}-1)/2$ 則 (27)式有效，但如 z 为实数而 $\frac{1}{2}<z<1$，則該式不成立，虽然在这种情况下 (27) 式的两边仍是有意义的．去了这种限制，式 (24) 至 (28) 在其所含的級数与綫性变换相結合的情况下，也可以供这些級数之一的解析开拓用．

二次变换的完全公式表可參看 E．戈尔薩特的著作，1881，及本書的 2-11 (1) 至 2-11 (36)．

二次变换是黎曼 P-方程的一般理論的結論［參看 Poole，(1936) 及 2-6 (2)］．我們只要說明(24)至(28)式的两边都滿足于超比方程就可以証明这些公式．例如，如果我們取(1)式中的參数值为 $2a, 2b$，及 $a+b+\frac{1}{2}$，就很容易証明 $F[a,b;a+b+\frac{1}{2};4z(1-z)]$ 滿足 (1)．其次我們看到在 $z=0$ 处，(27)式的两边有同一数值及同样的一階導数．因为由 2-2 (2) 及 2-3 (1) 可以推知(1)式只能有一个單值而在 $z=0$ 上正則的解(除非 $c=0, -1, -2, \cdots$)，(27) 式的两边应相等，而 $a+b+\frac{1}{2}=0, -1, -2, \cdots$ 的情形可能例外．

將綫性变换应用到式 (27) 上去，我們可得余下的公式 (24)至(28)．对于这种变换也有直接的証法．例如，要証明 (25)，可進行如下(參看 Bailey 1935)．將 (23) 式寫成

(29)　$(1-z)^{a+b-c}F(a, b; c; z)=F(c-a, c-b; c; z)$,

將两边均展开为 z 的冪級数，比較 z^n 的系数，得

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{(a)_r(b)_r}{(c)_r r!}\frac{(c-a-b)_{n-r}}{(n-r)!}=\frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n n!}$$

因而

$$(30)\quad \sum_{r=0}^{n}\frac{(a)_r(b)_r(-n)_r}{(c)_r(1+a+b-c-n)_r r!}=\frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n(c-a-b)_n}.$$

这就是薩尔苏茨公式．令式 (25) 的右边部分为

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}a)_r(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}-b)_r}{r!\,(1+a-b)_r}(-4z)^r(1-z)^{-a-2r}$$

此处 z^n 的系数为

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{(\frac{1}{2}a)_r(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}-b)_r(-4)^r(a+2r)_{n-r}}{(1+a-b)_r r!\,(n-r)!}.$$

因为下面的关系

$$(31)\quad 4^r(\tfrac{1}{2}a)_r(\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2})_r=(a)_{2r},\quad (-1)^r(-n)_r(n-r)!=n!,$$
$$(a+2r)_{n-r}=(a+n)_r(a)_n/(a)_{2r},$$

又因为薩尔苏茨公式 (30)，故上式应等于

$$\frac{(a)_n}{n!}\sum_{r=0}^{n}\frac{(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}-b)_r(a+n)_r(-n)_r}{(1+a-b)_r(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2})_r r!}=\frac{(a)_n(b)_n}{n!(1+a-b)_n}.$$

这就完成了式 (25) 的証明．

將 (22) 式应用到 (25) 式的右边，得

$$(1+z)^{-a}F[\tfrac{1}{2}a, \tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}; 1+a-b; 4z/(1+z)^2]$$
$$=F(a, b; 1+a-b; z),$$

如果我們以 $4z/(1+z)^2$ 作为一个新的变量來代替 z，就可得一个等价于 (26) 式的关系．

为了証明 (24)，先証明

$$(32)\quad F[a, b; 2b; 4z/(1+z)^2]$$
$$=(1+z)^{2a}(1+z^2)^{-a}F\{\tfrac{1}{2}a, \tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}; b+\tfrac{1}{2}; [2z/(1+z^2)]^2\},$$

这一式等价于

$$(33)\quad F(a, b; 2b; z)$$
$$=(1-\tfrac{1}{2}z)^{-a}F\{\tfrac{1}{2}a, \tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}; b+\tfrac{1}{2}; [z/(2-z)]^2\},$$

因为以 $4z/(1+z)^2$ 作为一个新变量来代替 z 即得．由式(26)可知，(32)式的右边部分等于

$$(1+z)^{2a}F(a,a-b+\tfrac{1}{2};b+\tfrac{1}{2};z^2),$$

因而由(26)及(32)就可直接得(24)．要証明(32)，我們应用式(10)，有

$$(34)\quad F[a,b;2b;4z/(1+z)^2]=\Gamma(2b)[\Gamma(b)]^{-2}(1+z)^{2a}$$
$$\times\int_0^1[t(1-t)]^{b-1}[1+2z(1-2t)+z^2]^{-a}dt.$$

如果我們以 $-z$ 代 z，$1-t$ 代 t，則上式右边的積分保持不变，因而它是 z 的偶函数，引入 $1-2t=\cos\theta$ 可見(34)式右边部分等于

$$2^{-2b+1}(1+z)^{2a}(1+z^2)^{-a}\Gamma(2b)\,[\Gamma(b)]^{-2}$$
$$\times\int_0^\pi(\sin\theta)^{2b-1}[1+2z\cos\theta/(1+z^2)]^{-a}d\theta.$$

將括号 [ ] 展开为 $\cos\theta$ 的冪級数，并根据 1-5 (19) 式來計算所得的 β-積分，可得

$$2^{-2b+1}(1+z)^{2a}(1+z^2)^{-a}\Gamma(2b)[\Gamma(b)]^{-2}$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(b)\Gamma(n+\frac{1}{2})(a)_{2n}}{\Gamma(b+n+\frac{1}{2})(2n)!}\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^{2n},$$

因为

$$(a)_{2n}=2^{2n}(\tfrac{1}{2}a)_n(\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2})_n,\quad (2n)!=2^{2n}n!(\tfrac{1}{2})_n,$$

可知上式为

$$\left[\frac{(1+z)^2}{1+z^2}\right]^a\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2b)}{2^{2b-1}\Gamma(b)\Gamma(b+\frac{1}{2})}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}a)_n(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2})_n}{(b+\frac{1}{2})_n n!}\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^{2n}$$

对和式前面的因式应用 γ 函数的乘法定理，就可得知这就是(32)式的右边部分．

如果参数的二个是不受限制的，則这时只有綫性及二次变换．

当且僅当

$$1-c=\pm(a-b)=\pm(c-a-b)$$

或 $\qquad\pm(1-c),\ \pm(a-b),\ \pm(c-a-b)$

中有二个等于 $\frac{1}{3}$ 时，存在有超比方程的三次变换．对于 2-11 節中所列的主要結果的証明可参看 E. Goursat (1881) 及 G. N. Watson

(1909) 的著作.

在三个参数中的一个不受限制时,存在有四次和六次的变换(見 Goursat, 1881, 及 2-11 節). 其他次数的变换只有在 a, b, c 为某些有理数时存在;在这些情况下,超比方程的解都是代数函数(見 2-7-2 節及 Goursat 1938).

2-1-6. $F(a, b; c; z)$ 作为参数的函数

在很多情况下,在参数的一定限制下(如不等式)証明超比方程的一种关系(如綫性变换)是合宜的;例如,由(10)式用限制条件 $\mathrm{Re}\, c > \mathrm{Re}\, b > 0$ 導出 (22) 式就比用(13)式在参数不加任何限制下來証明(22)式为容易. 在这种关系上,解析开拓的方法(关于参数的)是有用的.

$F(a, b; c; z_0)/\Gamma(c)$ 当 z_0 固定而 $|z_0|<1$ 时是 a, b, c 的一个整解析函数是很顯然的,因为在这种情形下超比級数在 a, b, c 空間的每一有限域(复数域)中都是均匀收斂的. 由式(22)可知对于 $\mathrm{Re}\, z_0 < \frac{1}{2}$ 的所有 z_0 也是如此. 典型的例子是:

$$F(2a, 1-2a; 2c; \tfrac{1}{2})/\Gamma(2c) = 2^{1-2c}\Gamma(\tfrac{1}{2})/[\Gamma(a+c)\Gamma(c-a+\tfrac{1}{2})],$$

$$F(1, 2a; 2a+1; -1)/\Gamma(2a+1) = 2[\psi(a+\tfrac{1}{2}) - \psi(a)]/\Gamma(2a).$$

其余公式可参看 2-8 (46) 至 2-8 (56). 这种类型的結果的大部分都可由超比級数的变换公式中推出,或从積分表示式的直接計值中推出,或从部分分式的展开式中推出. 已知的許多情形中还有几种别的情形需用較为精細的証明,例如,

$$F(2a, 2b; a+b+1; \tfrac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}(b-a)^{-1}\Gamma(a+b-1)$$
$$\times \{[\Gamma(b)\Gamma(a+\tfrac{1}{2})]^{-1} - [\Gamma(a)\Gamma(b+\tfrac{1}{2})]^{-1}\}.$$

对于这一式及更一般的結果可参看 Mitra (1943).

2-2. 超比方程的退化情形

2-2-1. 一个特殊解

一般說來,点 $z=0, \infty, 1$ 是超比方程 2-1 (1) 的解的支点. 如果我們先把 2-1 (1) 的某一个解 $u_1(z)$ 展开为 $z-z_0$ 的冪級数,

而后沿着一条閉曲綫 L 解析地开拓 u_1（閉曲綫 L 至少包圍支点 0, 1 中的一点），再回到 z_0，則我們將得到一个解 $u=\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2$，其中 λ_1 及 λ_2 为常数，u_1 及 u_2 为 2-1 (1) 的綫性独立解．通常，λ_2 將不等于 0，这就是說 2-1 (1) 的全部解可以从一个單独的解及其解析开拓中得出．但对于所有的 L，可能会有 $\lambda_2=0$．这时我們就称之为是一个**退化情形**，而將这一过程中所含的解 u_1 称为**退化解**．

如果一單迴綫 $L_0^{(+)}$ 或 $L_1^{(+)}$（它在正方向内圍繞 $z=0$ 或 $z=1$）对 u_1 的影响是在 u_1 上乘以一个因子 $e^{2\pi i\rho}$ 或 $e^{2\pi i\sigma}$，則

$$z^{-\rho}(1-z)^{-\sigma}u_1(z)=u^*(z)$$

是 z 的一个單值函数，对所有有限的 z 正則，可能有 $z=0$ 及 $z=1$ 的例外，此处 u^* 可以有極点．根据富契司方程的一般理論（見 Poole, 1936），u_1，因而也是 u^*，在 $z=\infty$ 上不能有一本性奇点．故 u^* 必是一个有理函数，只在 $z=0,\ \infty,\ 1$ 处有極点，因而在退化情形下，u_1 应有如下形式：

$$u_1(z)=z^{\lambda}(1-z)^{\mu}p_n(z) \tag{1}$$

其中 $p_n(z)$ 代表一个 n 次多項式，而 $p_n(0)\neq 0$, $p_n(1)\neq 0$.

由黎曼的 P-方程的一般理論（見 Winston 1895 及 2-7-1 節）可知，2-1 (1) 式当且僅当数

$$a,\ b,\ c-a,\ c-b \tag{2}$$

中至少有一数为整数时具有形如 (1) 的解．上面这个条件相当于八个数 $\pm(c-1)\pm(a-b)\pm(a+b-c)$ 中至少有一个为奇数．

如果(2)的四数中有一数确为一整数，且 $c\neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots$ 則下面两函数：

$$\begin{cases} u_1=F(a,b;c;z)=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c;z) \\ u_5=z^{1-c}(1-z)^{c-a-b}F(1-a,1-b;2-c;z) \\ \quad =z^{1-c}F(a+1-c,b+1-c;2-c;z) \end{cases} \tag{3}$$

中有一个具有 (1) 的形式，因为 (3) 式中的四个級数之一是有尽的。

2-2-2. 退化情形下的全解

我們現在將導出超比方程在退化情形下的二个綫性独立解。这可以借康曼尔的 24 个級数[見 2-9(1)至 2-9(24)]来完成。为了同时要得出这些解在整个区域 $|\arg(-z)|<\pi$ 的解析开拓，可应用如下的公式：

$$(4)\quad F(n+1, n+m+1; n+m+l+2; z) = \frac{(n+m+l+1)!\,(-1)^m}{l!\,n!\,(n+m)!\,(m+l)!}\frac{d^{n+m}}{dz^{n+m}}\left[(1-z)^{m+l}\frac{d^l}{dz^l}F(1,1;2;z)\right]$$

$$l, m, n=0, 1, 2, \cdots$$

其中 $F(1,1;2;z)=-z^{-1}\ln(1-z)$。同时应注意

$$(5)\quad (1-z)^{-b}\int z^{-a}(1-z)^{b-1}\,dz$$

是 $c=a$ 时 2-1 (1) 式的一个解，而且它可化为：

$$(6)\quad \sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{l+m}{r}\frac{z^{m+1-r}(1-z)^{-(m+l+1)}}{m+1-r} + (-1)^{m+1}\binom{l+m}{m+1}(1-z)^{-(m+l+1)}\ln z + \sum_{r=m+2}^{m+l}(-1)^r\binom{l+m}{r}\frac{z^{m+1-r}(1-z)^{-(m+l+1)}}{m+1-r}$$

$$b=l+m+1,\ c=a=m,\ l, m=0, 1, 2, \cdots$$

此处最后一个和式当 $l<2$ 时代表零。

要証明 (4)，我們只須应用 2-1 (7) 至 2-1 (9) 卽可；而 (6) 是一个初等公式。

由康曼尔級数中，两个綫性独立解的选择随(2)式中的量有多少个是整数而定。

在各种不同情况的全面研究中(見下表)，我們將应用下面的記法：

l, m, n	代表非負整数；
n. i.	表示一个量不是一整数；
deg.	表示解是 (1) 式型的；
rat.	表示解是一有理函数；

退化情形中的解

情形	a	b	c	$c-a-b$	退化的解	第二个解
1	$-m$	n. i.	n. i.	n. i.	u_1 rat. 2-9(1)	u_5 2-9(18)
2	$m+1$	n. i.	n. i.	n. i.	u_5 2-9(18)	u_1 2-9(1)
3	$c+m$	n. i.	n. i.	n. i.	u_1 2-9(2)	u_5 2-9(17)
4	$c-m-1$	n. i.	n. i.	n. i.	u_5 2-9(17)	u_1 2-9(2)
5	$-m$	n. i.	n. i.	$l+1$	u_1 rat. 2-9(1)	u_5 2-9(18) ln 2-3(2)
6	$m+1$	n. i.	n. i.	$l+1$	u_5 2-9(18)	u_1 2-9(1) ln 2-3(2)
7	$-m$	n. i.	n. i.	$-l$	u_1 rat. 2-9(1)	u_5 2-9(18) ln 2-3(4)
8	$m+1$	n. i.	n. i.	$-l$	u_5 2-9(18)	u_1 2-9(1) ln 2-3(2)
9	$m+1$	$m+l+1$	n. i.	n. i.	u_5 2-9(18)	u_1 2-9(1) ln 2-1(18)
10	$-m$	$l+1$	n. i.	n. i.	u_1 rat. 2-9(1)	u_5 deg. 2-9(18)
11	$-m-l$	$-m$	n. i.	n. i.	u_1 rat. 2-9(1)	u_5 2-9(18) ln 2-1(18)
12	$-m$	n. i.	$-m-l$	n. i.	u_1 rat. 2-9(1)	u_4 deg. 2-9(15)
13	$-m-l-1$	n. i.	$-m$	n. i.	u_5 rat. 2-9(17)	u_4 2-9(14) ln 2-1(18)
14	$-m$	n. i.	$n+1$	n. i.	u_1 rat. 2-9(1)	u_4 2-9(14) ln 2-1(18)
15	$m+1$	n. i.	$-n$	n. i.	u_5 2-9(18)	u_3 2-9(9) ln 2-1(18)
16	$m+l+1$	n. i.	$m+1$	n. i.	u_1 2-9(2)	u_3 2-9(9) ln 2-1(18)
17	$m+1$	n. i.	$m+l+2$	n. i.	u_3 rat. 2-9(9)	u_6 deg. 2-9(21)
18	$m+n+1$	$m+n+l+1$	$n+1$	$-2m-n-l-1$	u_1 rat. 2-9(2)	u_2 2-9(5) ln 2-2(4)
19	$m+1$	$m+n+l+2$	$m+n+3$	$-l-m-1$	u_1 rat. 2-9(2)	u_5 rat. 2-9(18)
20	$m+1$	$m+l+1$	$m+n+l+2$	$n-m$	u_2 rat. 2-9(13)	u_1 2-9(1) ln 2-2(4)
21	$-m$	$n+l+1$	$n+1$	$m-1$	u_1 rat. 2-9(1)	u_4 2-9(14) ln 2-2(4)
22	$-m$	$l+1$	$n+l+2$	$n+1-m$	u_1 rat. 2-9(1)	u_5 rat. 2-9(17)
23	$-m-l$	$-m$	$n+1$	$n+2m+l+1$	u_1 rat. 2-9(1)	u_6 2-9(21) ln 2-2(4)
24	$-m-l$	$-m$	$-m-l-n$	$m-n$	u_1 rat. 2-9(1)	u_5 2-9(18) ln 2-2(4)
25	$-1-m-l-n$	$-n-l$	$-n$	$2l+m+n+1$	u_5 rat. 2-9(17)	u_6 2-9(22) ln 2-2(4)
26	$-m-n-l-2$	$-l$	$-n-l-1$	$l+m+1$	u_1 rat. 2-9(1)	u_5 rat. 2-9(17)
27	$-m-n-1$	$l+1$	$-n$	$m+l+2$	u_5 rat. 2-9(17)	u_4 2-9(13) ln 2-2(4)
28	$-m$	$l+1$	$-m-n-1$	$l-n$	u_1 rat. 2-9(1)	u_5 rat. 2-9(18)
29	$m+1$	$m+l+1$	$-n$	$-2m-l-n-2$	u_6 rat. 2-9(18)	u_2 2-9(6) ln 2-2(4)

ln 2-1(19) 表示解的解析开拓可以由 2-1 (19) 來進行,并導成对数;

u_i 2-9 (1) 表示康曼尔的 24 个級数之一并代表,譬如說,六个函数的第一个并为之取表达式 2-9 (1).

如果一个解具有至少一个包含对数的解析开拓,我們就把它标出在上頁的表上.

因为超比方程是关于 a 及 b 对称的,故在上表中,我們將設:

(i) 如果 a 或 b 是一个整数,則 a 必是一整数;

(ii) 如 $c-a$ 或 $c-b$ 是一整数,則 $c-a$ 必是一整数;

(iii) 如 $b-a$ 是一整数,則 $b-a\geqslant 0$.

2-3. 一般情形下的全解和漸近展开式

2-3-1. 非退化情形下超比方程的綫性独立解

現在我們可以假定数 $a, b, c-a, c-b$ 之中沒有一个是整数. 則 2-1 (1) 的二个綫性独立解 $u_1(z)$, $u_2(z)$ 可以用沿着一条包圍点 $z=0, \infty, 1$ 之一的路徑的解析开拓从任一不恆等于零的解中得出. 如果 c 不是一个整数,我們可以选取

$$(1)\qquad \begin{aligned} u_1(z) &= F(a, b; c; z) \\ u_2(z) &= z^{1-c}F(a-c+1, b-c+1; 2-c; z). \end{aligned}$$

如果 $a-b$ 及 $c-a-b$ 也不是整数,則 $u_1(z)$, $u_2(z)$ 的解析开拓可以用 2-10 (1)至 2-10 (6)來完成. 如果 $a-b$ 是一整数而 c 不是一整数,則公式 2-1 (18) 給出 $u_1(z)$ 及 $u_2(z)$ 向 $z=\infty$ 点的鄰域的解析开拓,而如 $c-a-b$ 是一整数,則对于 $c=a+b+l$, $l=0, 1, 2, \cdots$, 我們有

$$(2)\qquad \begin{aligned} &F(a, b; a+b+l; z) \\ &= \frac{\Gamma(l)\Gamma(a+b+l)}{\Gamma(a+l)\Gamma(b+l)} \sum_{n=0}^{l-1} \frac{(a)_n(b)_n}{(1-l)_n n!}(1-z)^n \\ &\quad + (1-z)^l(-1)^l \frac{\Gamma(a+b+l)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+l)_n(b+l)_n}{n!(n+l)!}[k_n - \ln(1-z)](1-z)^n \end{aligned}$$

其中 $k_n=\psi(n+1)+\psi(n+1+l)-\psi(a+n+l)-\psi(b+n+l)$

且如 $l=0$，则 $\sum_{n=0}^{l-1}$ 为零.

这个結果可以从 2-10 (1) 中令 $c=a+b+l+\varepsilon$，并取 $\varepsilon\to 0$ 的極限而得出.

同理，我們得这种情形下的 u_2 为：

(3) $$z^{1-a-b-l}F(1-b-l,1-a-l;2-a-b-l;z)$$
$$=\frac{\Gamma(l)\Gamma(2-a-b-l)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}z^{1-a-b-l}\sum_{n=0}^{l-1}\frac{(1-b-l)_n(1-a-l)_n}{(1-l)_n n!}$$
$$\times(1-z)^n+z^{1-a-b-l}(1-z)^l(-1)^l\frac{\Gamma(2-a-b-l)}{\Gamma(1-b-l)\Gamma(1-a-l)}$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-a)_n(1-b)_n}{n!\,(n+l)!}[k'_n-\ln(1-z)](1-z)^n$$

其中

$$k'_n=\psi(n+1)+\psi(n+1+l)-\psi(1-b+n)-\psi(1-a+n)$$

且如 $l=0$，$\sum_{n=0}^{l-1}$ 代表零.

最后，如 $c=a+b-l$ $(l=0,1,2,\cdots)$. 且如 c 是非整数，对于 $u_1(z)$，有

(4) $$F(a,b;a+b-l;z)$$
$$=(1-z)^{-l}\frac{\Gamma(l)\Gamma(a+b-l)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{l-1}\frac{(b-l)_n(a-l)_n}{n!\,(1-l)_n}(1-z)^n$$
$$+(-1)^l\frac{\Gamma(a+b-l)}{\Gamma(a-l)\Gamma(b-l)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{n!\,(n+l)!}$$
$$\times[k''_n-\ln(1-z)](1-z)^n$$

其中

$$k''_n=\psi(1+l+n)+\psi(1+n)-\psi(a+n)-\psi(b+n)$$

且如 $l=0$，$\sum_{n=0}^{l-1}$ 代表零.

如果以 $1+l-a$，$1+l-b$ 分别置换 a，b，则可得 u_2 的对应公式.

如果 c 是一整数，我們可取

(5) $u_1(z)=F(a,b;c;z)$ $c>0.$

(6) $u_1(z)=z^{1-c}F(a-c+1,b-c+1;2-c;z)$ $c\leqslant 0.$

(7) $u_2(z)=F(a,b;1+a+b-c;1-z),$

$1+a+b-c\neq 0,\ -1,\ -2,\cdots$

(8) $u_2(z)=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;1-a-b+c;1-z)$

$1+a+b-c=0,\ -1,\ -2,\cdots$

$u_1(z)$ 及 $u_2(z)$ 向 $z=0$, $z=\infty$ 或 $z=1$ 的点的鄰域的解析开拓可以应用 2-10 (1) 至 2-10 (15) 式來完成,因为我們在整个这一節中可以假定数 $a,b,c-a,c-b$ 中沒有一个是整数.

2-3-2. 漸近展开式

对于大的 $|z|$ 值,超比方程解的性态可以用向 $z=\infty$ 的点的鄰域的解析开拓公式來完全寫出. 除非 $a-b$ 是一整数,每一个解 $u(z)$ 都可以寫成下面的形式:

(9) $u(z)=\lambda_1 z^{-a}+\lambda_2 z^{-b}+O(z^{-a-1})+O(z^{-b-1})$

其中 λ_1 及 λ_2 是常数;如 $a-b$ 是一整数,則 z^{-a} 或 z^{-b} 应乘以一个因子 $\ln z$.

对于大的 $|a|$, $|b|$, $|c|$ 值, $F(a,b;c;z)$的性态曾由 O. 潘隆(1916—17)及 G. N. 華特生 (1918) 加以研究过.

如果 a,b 及 z 是定数,而 c 是一个大数,且 $|\arg c|\leqslant\pi-\varepsilon$, $\varepsilon>0$, 則对于 $|z|<1$, 我們有

(10) $$F(a,b;c;z)=1+\frac{ab}{c}z+\cdots+\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}z^n+O(|c^{-n-1}|).$$

用稍加变更的余項式,則只要 $\operatorname{Re}c\to\infty$, 那么卽使在 $|z|>1$, $|\arg(1-z)|<\pi$ 时,上式仍有效. 因此,如 $|c|\to\infty$ 而 b 是固定的,則 $\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}b$. 对于一个足夠大的 n 值,我們仍有 $\operatorname{Re}(b+n)>0$.

(11) $$F(a,b;c;z)-1-\frac{ab}{c}z\cdots-\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}z^n\equiv\rho_{n+1}(a,b;c;z)$$

$$=\Gamma(c)\Gamma(a+n)z^{n+1}/[\Gamma(b)\Gamma(c-b)\Gamma(a)n!]$$

$$\times\int_0^1\int_0^1 t^{b+n}(1-t)^{c-b-1}(1-s)^n(1-stz)^{-a-n-1}\,ds\,dt.$$

我們把 $a=\alpha+i\alpha'$, $b=\beta+i\beta'$, $c=\gamma+i\gamma'$ 分解为实虚两部．則．对于 $0\leqslant s, t\leqslant 1$, 我們有 $|(1-stz)^{-a-n-1}|\leqslant M^{-\alpha-n-1}$, 此处 M 依賴于 z, 表示 $|1-stz|$ 的最小值或最大值．

这給出

$$|\rho_{n+1}|\leqslant\frac{|\Gamma(c)(a)_{n+1}z^{n+1}|}{|\Gamma(b)\Gamma(c-b)|(n+1)!}M^{-\alpha-n-1}\int_0^1 t^{\beta+n}(1-t)^{\gamma-\beta-1}dt$$

$$=|z/M|^{n+1}M^{-\alpha}\frac{|(a)_{n+1}(\beta)_{n+1}|}{(n+1)!}\frac{|\Gamma(\beta)|}{|\Gamma(b)|}\frac{|\Gamma(c)|}{|\Gamma(c-b)|}$$

$$\times\frac{\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n+1)}.$$

由 1-18 (5) 式我們得 γ-函数的后面三个商数的一个估值．結果是

(12)　$|\rho_{n+1}|\leqslant\mu(n)|z|^{n+1}|c|^{-\beta}\gamma^{-\beta-n-1}$

其中 $\mu(n)$ 依賴于 n, a, b, 如 $\operatorname{Re} z>0$, 并依賴于 $\operatorname{Im} z$. 这就証明了公式(10)．[对于一个足夠大的 n 值，以 $|\rho_{n+1}|$ 代 $0(|c|^{-n-1})$]．但因 (10) 中的漸近級数的每一項在性态上与 $|\rho_{n+1}|$ 相似，故知对于 $n=1, 2, \cdots$, (10) 式顯然也有效．对于更普遍的結果，可参看 T. M. 麥克罗勃特 (1923) 的著作，他对 $\arg c>\pi$ 时的情形，也証明了 (10)．

如 a, c 及 z 是固定的数，$c\neq 0, -1, -2, \cdots, 0<|z|<1$, 且如 $|b|\to\infty$ 而 $-3\pi/2<\arg zb<\frac{1}{2}\pi$, 則得

(13)　$$F(a, b; c; z)=F(a, b; c; bz/b)$$
$$=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(bz)^n}{(c)_n n!}\right][1+0(|b|^{-1})]$$

此处对于大的自变量的合流超比函数 [見第 6 章或 Whittaker-Watson 1927, 16-3] 的漸近式給出

(14)　$$F(a,b;c;z)=e^{-i\pi a}[\Gamma(c)/\Gamma(c-a)](bz)^{-a}[1+0(|bz|^{-1})]$$
$$+[\Gamma(c)/\Gamma(a)]e^{bz}(bz)^{a-c}[1+0(|bz|^{-1})].$$

同理，如 $-\frac{1}{2}\pi<\arg bz<3\pi/2$, 我們有

(15)　$$F(a,b;c;z)=e^{i\pi a}[\Gamma(c)/\Gamma(c-a)](bz)^{-a}[1+0(|bz|^{-1})]$$
$$+[\Gamma(c)/\Gamma(a)]e^{bz}(bz)^{a-c}[1+0(|bz|^{-1})].$$

在参数中有不止一个趋向于無窮时，G. N. 華特生（1918）曾得到下面的結果.

設 ξ 由 $z\pm(z^2-1)^{\frac{1}{2}}=e^{\pm\xi}$ 所定义，并令

$$1-e^{\xi}=(e^{\xi}-1)e^{\mp i\pi}$$

其中上面的或下面的符号随 $\operatorname{Im} z \gtrless 0$ 而定. 則对于大的 $|\lambda|$，我們有

(16) $$(\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{2})^{-a-\lambda}F[a+\lambda, a-c+1+\lambda; a-b+1+2\lambda; 2(1-z)^{-1}]$$
$$=\frac{2^{a+b}\Gamma(a-b+1+2\lambda)\Gamma(\frac{1}{2})\lambda^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(a-c+1+\lambda)\Gamma(c-b+\lambda)}e^{-(a+\lambda)\xi}$$
$$\times(1-e^{-\xi})^{-c+\frac{1}{2}}(1+e^{-\xi})^{c-a-b-\frac{1}{2}}[1+0(\lambda^{-1})]$$

其中 $|\arg\lambda|\leqslant\pi-\delta,\ \delta>0$，且

(17) $$F(a+\lambda, b-\lambda; c; \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}z)$$
$$=\frac{\Gamma(1-b+\lambda)\Gamma(c)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(c-b+\lambda)}2^{a+b-1}(1-e^{-\xi})^{-c+\frac{1}{2}}(1+e^{-\xi})^{c-a-b-\frac{1}{2}}$$
$$\times\lambda^{-\frac{1}{2}}[e^{(\lambda-b)\xi}+e^{\pm i\pi(c-\frac{1}{2})}e^{-(\lambda+a)\xi}][1+0(|\lambda^{-1}|)]$$

其中上面或下面的符号視 $Im\,z\gtrless 0$ 而定，且 $|\lambda|$ 是大的数，

$$\xi=\zeta+i\eta,$$

$$-\tfrac{1}{2}\pi-w_2+\delta<\arg\lambda<\tfrac{1}{2}\pi+w_1-\delta \qquad \delta>0,$$
$$w_2=\tan^{-1}(\eta/\zeta),\quad -w_1=\tan^{-1}[(\eta-\pi)/\zeta] \quad \eta\geqslant 0,$$
$$w_2=\tan^{-1}[(\eta+\pi)/\zeta],\quad -w_1=\tan^{-1}(\eta/\zeta) \quad \eta\leqslant 0.$$

此处 $\tan^{-1}x$ 代表函数的主值，即

$$-\tfrac{1}{2}\pi<\tan^{-1}x<\tfrac{1}{2}\pi.$$

a, b, c（或它們的模）是大的数的另外一些情形，曾由 M. J. 拉愛特赫尔（1947），H. 薛福德（1947）T. M. 乔雷（1950 a, b）研究过. $a=i\rho v,\ b=iv,\ c=1$，其中 ρ, v 是实数，ρ 固定及 $v\to\infty$ 的情形曾由 A. 松本費尔特（1939）研究过.

2–4. 表示超比級数或包含超比級数的積分

欧拉積分 2–1（10）不能用初步的代換变換为它自身，使关系

$$F(a, b; c; z)=F(b, a; c; z)$$

成为顯然，虽然这是超比級数的一个普通的性質. 魏廾格（1902）

曾導出了 F 的一个三重積分,使关于 a 及 b 的对称性趋于明顯,同样, A. 爱尔台里 (1937 b) 導出了下面的二重積分

$$(1)\qquad F(a, b; c; z)=\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}$$

$$\times\int_0^1\int_0^1 t^{b-1}r^{a-1}(1-t)^{c-b-1}(1-r)^{c-a-1}(1-trz)^{-c}dt\,dr$$

这个式子可从 2–1 (10) 及 1–5 (11) 中得出.

H. 彼得曼 (1909) [并見 A. Erdélyi (1937 a, b)] 曾証明

$$(2)\qquad F(a, b; c; z)=\{\Gamma(c)/[\Gamma(s)\,\Gamma(c-s)]\}$$

$$\times\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{c-s-1}F(a, b; s; xz)\,dx$$

$$\operatorname{Re} c>\operatorname{Re} s>0,\ z\neq 1,\ |\arg(1-z)|<\pi.$$

这个式子可这样得出:將 $F(a, b; s; xz)$ 展开为 xz 的冪級数,而后逐項積分并应用公式 1–5 (1) 及 1–5 (5).

利用非整数次分部積分法,可得 (2) 式的普遍化公式如下 (Erdélyi, 1939):

$$(3)\quad F(a,b;c;z)=\Gamma(c)[\Gamma(s)\Gamma(c-s)]^{-1}\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{c-s-1}(1-xz)^{-a}$$

$$\times F(a-a, b; s; xz)\,F[a', b-s; c-s; (1-x)z/(1-xz)]\,dx$$

$$=\{\Gamma(c)/[\Gamma(s)\,\Gamma(c-s)]\}\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{c-s-1}(1-xz)^{r-a-b}$$

$$\times F(r-a, r-b; s; xz)\,F[a+b-r, r-s; c-s;$$

$$(1-x)z/(1-xz)]\,dx.$$

將 2–1 (10) 及 2–1 (15) 的積分表示式和超比級数的綫性变換及二次变換联系起來,就可得很多的積分公式. 例如,从 2–1 (15) 开始,以 $-z$ 代 z, 并应用米林变換公式,得

$$(4)\qquad \frac{\Gamma(a+s)}{\Gamma(a)}\,\frac{\Gamma(b+s)}{\Gamma(b)}\,\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+s)}\,\Gamma(-s)$$

$$=\int_0^\infty F(a, b; c; -z)\,z^{-s-1}\,dz$$

$$c\neq 0, -1, -2, \cdots,\ \operatorname{Re} s<0,\ \operatorname{Re}(a+s)>0,\ \operatorname{Re}(b+s)>0.$$

將 (4) 式的右边部分分成由 0 至 1 及由 1 至 ∞ 的二个積分的和,

对后一积分的被积式应用公式2-1(17)，并以 $-z$ 及 $-z^{-1}$ 代 z，得

$$\int_0^\infty F(a,b;c;-z)z^{-s-1}dz=e^{\pm i\pi s}\int_0^1 F(a,b;c;z)z^{-s-1}dz$$
$$+\Gamma(c)\Gamma(b-a)[\Gamma(b)\Gamma(c-a)]^{-1}e^{\pm i\pi(a+s)}$$
$$\times\int_0^1 F(a,1-c+a;1-b+a;z)z^{a+s-1}dz$$
$$+\Gamma(c)\Gamma(a-b)[\Gamma(a)\Gamma(c-b)]^{-1}e^{\pm i\pi(b+s)}$$
$$\times\int_0^1 F(b,1-c+b;1-a+b;z)z^{b+s-1}dz.$$

在整个过程中我們可以取上面的符号或下面的符号．現在如果我們將上面符号的式及下面符号的式合并來消去第三个積分，設 $s=w-\frac{1}{2}a$：

$$(5)\qquad \frac{\Gamma(\frac{1}{2}a+w)\Gamma(\frac{1}{2}a-w)}{\Gamma(c-\frac{1}{2}a+w)\Gamma(1-b+\frac{1}{2}a-w)}$$
$$=\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(c-a)}\sum_{n=0}^\infty\frac{(a)_n(1-c+a)_n}{(1-b+a)_n n!}\frac{1}{n+w+\frac{1}{2}a}$$
$$+\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)\Gamma(1-b)}\sum_{n=0}^\infty\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}\frac{1}{n-w+\frac{1}{2}a}$$
$$=\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(c-a)}\int_0^1 F(a,1-c+a;1-b+a;z)$$
$$\times z^{\frac{1}{2}a+w-1}dz+\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)\Gamma(1-b)}\int_0^1 F(a,b;c;z)z^{\frac{1}{2}a-w-1}dz.$$

(5)式中的第一式在 $\mathrm{Re}(a+b-c)<1$ 时有效；而第二式則在 $\mathrm{Re}(a+b-c)<1$，$\mathrm{Re}(\frac{1}{2}a\pm w)>0$，$\mathrm{Re}(1-b+c)>0$，$\mathrm{Re}\,b<1$ 时成立．如 $c-a=1-b$，則上式变成特別簡單．

我們有：

$$(6)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\cos\theta)^{2\mu}(\sin\theta)^{2\nu}e^{i2a\theta}d\theta$$
$$=2^{-2\mu-2\nu-1}e^{i\pi(a-\mu-\frac{1}{2})}[\Gamma(a-\mu-\nu)\Gamma(2\mu+1)/\Gamma(1+a-\nu+\mu)]$$
$$\times F(-2\nu,a-\mu-\nu;1+a-\nu+\mu;-1)$$
$$+2^{-2\mu-2\nu-1}e^{i\pi(\nu+\frac{1}{2})}[\Gamma(a-\mu-\nu)\Gamma(2\nu+1)/\Gamma(1+a-\mu+\nu)]$$
$$\times F(-2\mu,a-\mu-\nu;1+a-\mu+\nu;-1)$$
$$\mathrm{Re}\,\mu>-\tfrac{1}{2},\ \mathrm{Re}\,\nu>-\tfrac{1}{2}.$$

特别是，如 $a=\nu+\mu+1$, $2\mu=x$, $2\nu=y$, 则由 1-5(13) 式(以 $a=1$, $b=-1$, $v=e^{2i\theta}$) 可得

$$(7)\qquad e^{-\frac{1}{2}i\pi(y+1)}2^{x+y-1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\cos\theta)^x(\sin\theta)^y e^{i(x+y+2)\theta}\,d\theta$$

$$=2^{x+y+1}[\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)/\Gamma(x+y+2)]$$

$$=(y+1)^{-1}F(-x,1;y+2;-1)+(x+1)^{-1}F(-y,1;x+2;-1)$$

$$\operatorname{Re}x>-1,\ \operatorname{Re}y>-1.$$

这些公式可以这样得到：即将公式(6)的左边的 $e^{2i\theta}$ 作为一个新变量，应用欧拉积分表示式 2-1(10).

对于 $\operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2}$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$, 我們如定义

$$(\cos\theta)^{2\mu}=e^{-2i\pi\mu}[\sin(\theta-\tfrac{1}{2}\pi)]^{2\mu}\qquad \tfrac{1}{2}\pi\leqslant\theta\leqslant\pi,$$

则可由 (6) 導出：

$$(8)\qquad \int_0^{\pi}(\cos\theta)^{2\mu}(\sin\theta)^{2\nu}e^{2ia\theta}\,d\theta$$

$$=e^{i\pi(a-\mu)}4^{-\mu-\nu}\frac{\pi\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(1+\mu+\nu-a)\Gamma(1+\nu+a-\mu)}$$

$$\times F(-2\mu,a-\mu-\nu;1+a-\mu+\nu;-1).$$

特别是，当 $2\mu=m=0,1,2,\cdots$, 且 $\nu=0$, 则

$$F(-m,-\tfrac{1}{2}m-\tfrac{1}{2}a;1-\tfrac{1}{2}m-\tfrac{1}{2}a;-1)$$

$$=(-2)^m(m+a)\csc(a\pi)\int_0^{\pi}(\cos\theta)^m\cos a\theta\,d\theta.$$

$$a\neq0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$$

合并二次变换式 2-1(24) 与 2-1(10)，可得：

$$(9)\qquad F(a,a-b+\tfrac{1}{2};b+\tfrac{1}{2};z^2)$$

$$=\frac{\Gamma(b+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(b)}\int_0^{\pi}(\sin\varphi)^{2b-1}(1+2z\cos\varphi+z^2)^{-a}\,d\varphi$$

$$\operatorname{Re}b>0,\ |z|<1.$$

如 $n=0,1,2,\cdots$, 得

$$(10)\qquad F(a,n+a;n+1;z^2)$$

$$=\frac{z^{-n}n!}{2\pi(a)_n}\int_0^{2\pi}\cos n\varphi(1-2z\cos\varphi+z^2)^{-a}\,d\varphi$$

$$\operatorname{Re}a>0,\ |z|<1;$$

上式的証明可將

$$(1-2z\cos\varphi+z^2)^{-\alpha}=(1-ze^{i\varphi})^{-\alpha}(1-ze^{-i\varphi})^{-\alpha}$$

展开为乘積

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_l}{l!}z^l e^{i\varphi l}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m}{m!}z^m e^{-i\varphi m}.$$

如果我們將这两和式乘起來，并將 $e^{\pm i\varphi n}$ 的系数集合起來，就可得(10)．又我們有

$$(11)\quad \frac{\pi 2^{-\beta}\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\nu)\Gamma(1+\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\nu)}$$
$$\times F(-\nu,\tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{1}{2}\beta-\tfrac{1}{2}\nu;1+\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{1}{2}\nu;a^2/b^2)$$
$$=\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}e^{i\alpha\theta}(\cos\theta)^{\beta}(a^2e^{i\theta}+b^2e^{-i\theta})^{\nu}\,d\theta$$

$$\operatorname{Re}\beta>-1,\ |b|>|a|.$$

上式可將被積式展开为二項級数并逐項積分而得出．如 $|a|>|b|$，則以 $-\alpha$ 代 α，$-\theta$ 代 θ 即可得相应的公式．(11) 式中超比函数向区域 $|a/b|>1$ 的解析开拓并不能給出右边積分的值．

2-5. 各种結果

2-5-1. 母函数

如 $n=0,1,2,\cdots$ 則多項式 $F(-n,a+n;c;z)$ 是雅可比多項式(見第 10 章正交多項式)．对于这种多項式其母函数为:

$$(1)\quad \sum_{n=0}^{\infty}s^n(c)_nF(-n,a+n;c;z)/n!$$
$$=S^{-1}\left(\frac{S+s-1}{2sz}\right)^{c-1}\left(\frac{S+s+1}{2}\right)^{c-a}$$

其中 $$S=[1-2(1-2z)s+s^2]^{\frac{1}{2}}.$$

当 $s\to0$ 則 $S\to1$．(1)式左边部分的展开式在 $|s|<1$ 及 $|1-2z|<1$ 时收斂．在 $\operatorname{Re}c>0$ 的情形下，我們可以把 $u=t(1-tz)(1-t)^{-1}$ 作为新的变量引入積分式 2-1 (10) 而來証明 (1)，这样，有:

$$(2)\qquad F(b,\ a-b;\ c;\ z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}$$
$$\times\int_0^{\infty}u^{b-1}\left(\frac{1-u+U}{2}\right)^{c-a}\left(\frac{1+u-U}{2uz}\right)^{c-1}\frac{du}{U}$$
$$U=[1+2u(1-2z)+u^2]^{\frac{1}{2}}.$$

引用米林变换的反演公式可得

$$(3)\qquad \left(\frac{1-u+U}{2}\right)^{c-a}\left(\frac{1+u-U}{2uz}\right)^{c-1}U^{-1}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}u^{-b}F(b,\ a-b;\ c;\ z)\ \frac{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}\,db,$$

其中 β 是一个适当地选定的实数．(3) 式右边的被積式有極点在 $b=-n\ (n=0,1,2,\cdots)$ 上．留数理論的一个应用可以用 2-3 節的結果來加以証明，以 $s=-u$，就給出了 (1)．由 (1) 式两边对 c 的解析开拓可証 c 的限制可以降低．

我們可以把(3)看作是 $F(b,\ a-b;\ c;\ z)$的一个連續綫性母函数．对于一个双綫性母函数及很多有关的結果可參看 A. 爱尔台里 (1941) 的著作．

用証明 (1) 的同样方法可証

$$(1-s)^{a-c}(1-s+sz)^{-a}=\sum_{n=0}^{\infty}s^n(c)_nF(-n,\ a;c;\ z)/n!$$
$$|s|<1,\quad |s(1-z)|<1.$$

2-5-2．超比級数的積

卡萊，沃尔 (1899)，巴萊 (1935) 曾証明过許多公式，这些公式曾由 G. L. 貝契納尔及 T. W. 宗台 (1948) 加以普遍化 (对于这些公式的証明及更一般的結果可与后面的比較)．卡萊及沃尔的一个結果是：如

$$(1-z)^{a+b-c}F(2a,\ 2b;\ 2c-1;\ z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^n,$$

則

$$(4)\qquad F(a,\ b;\ c-\tfrac{1}{2};\ z)\,F(c-a,\ c-b;\ c+\tfrac{1}{2};\ z)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)_n}{(c+\frac{1}{2})_n}A_nz^n.$$

G. L. 貝契納尔和 T. W. 宗台 (1948) 曾証明乘法及平方公式为:

(5) $$F(2a,\, 2b;\, 2c;\, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})_n (a)_n (b)_n (c-a)_n (c-b)_n}{n!\,(c+\frac{1}{2})_n (c+n-1)_n (c)_{2n}} z^{2n} \times [F(a+n,\, b+n;\, c+2n;\, z)]^2,$$

(6) $$F(a,\, b;\, c;\, z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n (c-a)_n (c-b)_n}{n!\,(c+n-1)_n (c)_{2n}} z^{2n} \times F(a+n, b+n; c+2n; z) F(a+n, b+n; c+2n; -z),$$

(7) $$[F(a,\, b;\, c;\, z)]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_n (a)_n (b)_n (c-a)_n (c-b)_n}{n!\,(c)_n (c)_{2n} (c+n-\frac{1}{2})_n} z^{2n} \times F(2a+2n,\, 2b+2n;\, 2c+4n;\, z).$$

所有这些公式在 $|z|<1$ 及所含超比級数有定义(即如 $2c$ 及 c 不等于 $0, -1, -2, \cdots$) 时成立.

貝契納尔及宗台的公式是加法定理型的公式 [見 Burchnall 及 chaundy (1940)], 由这些公式可得

$$F(a,\, b;\, c;\, z+\zeta-z\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(a)_n (b)_n (c-a)_n (c-b)_n}{n!\,(c+n-1)_n (c)_{2n}} z^n \zeta^n \times F(a+n,\, b+n;\, c+2n;\, z)\, F(a+n,\, b+n;\, c+2n;\, \zeta)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(a)_n (b)_n}{n!\,(c)_n} z^n \zeta^n F(a+n,\, b+n;\, c+n;\, z+\zeta),$$

$$F(a,\, b;\, c;\, z)\, F(a,\, b;\, c;\, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n (c-a)_n (c-b)_n}{n!\,(c)_n (c)_{2n}} (z\zeta)^n \times F(a+n,\, b+n;\, c+2n;\, z+\zeta-z\zeta).$$

如 $|z|$, $|\zeta|$ 及 $|z+\zeta-z\zeta|$ 或 $|z+\zeta|$ 皆 <1, $c\neq 0, -1, -2, \cdots$ 則上面这些公式都有效.

有些双綫性关系式曾由 J. 米克斯奈 (1941) 証明过, 例如

$$(8)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda}{n}s^n F(-n,\, b;\, c;\, z)\, F(-n,\, \beta;\, \gamma;\, \zeta)$$

$$=(1+s)^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda}{n}\frac{(z\zeta s)^n}{(1+s)^{2n}}\,\frac{(b)_n(\beta)_n}{(c)_n(\gamma)_n}$$

$$\times F[n-\lambda,\, b+n;\, c+n;\, sz/(1+s)]$$

$$\times F[n-\lambda,\, \beta+n;\, \gamma+n;\, \zeta s/(1+s)],$$

$$(9)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda}{n}s^n F(-n,\, b;\, c;\, z)\, F(n-\lambda,\, \beta;\, \gamma;\, \zeta)$$

$$=(1+s)^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda}{n}\frac{(-s\zeta z)^n}{(s+1)^{2n}}\,\frac{(b)_n(\beta)_n}{(c)_n(\gamma)_n}$$

$$\times F[n-\lambda,\, b+n,\, c+n;\, sz/(1+s)]$$

$$\times F[n-\lambda,\, \beta+n;\, \gamma+n;\, \zeta/(1+s)],$$

$$(10)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda}{n}s^n F(n-\lambda,\, b;\, c;\, z)\, F(n-\lambda,\, \beta;\, \gamma;\, \zeta)$$

$$=(1+s)^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda}{n}\frac{(z\zeta s)^n}{(1+s)^{2n}}\,\frac{(b)_n(\beta)_n}{(c)_n(\gamma)_n}$$

$$\times F[n-\lambda,\, b+n;\, c+n;\, z/(1+s)]$$

$$\times F[n-\lambda,\, \beta+n;\, \gamma+n;\, \zeta/(1+s)],$$

$$(11)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda}{n}s^n\frac{(c-b)_n(\gamma-\beta)_n}{(c)_n(\gamma)_n}F(n-\lambda,\, b;\, c+n;\, z)$$

$$\times F(n-\lambda,\, \beta;\, \gamma+n;\, \zeta)$$

$$=(1+s)^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{\lambda}\frac{[s(1-z)(1-\zeta)]^n}{(1+s)^{2n}}$$

$$\times\frac{(b)_n(\beta)_n}{(c)_n(\gamma)_n}F[n-\lambda,\, b+n;\, c+n;\, (s+z)/(1+s)]$$

$$\times F[n-\lambda;\, \beta+n;\, \gamma+n;\, (s+\zeta)/(1-s)].$$

所有这些公式当 s, z, ζ 合于超比函数的第四自变量而第四自变量異于 1 及 ∞，且当 $|s|$ 足夠小时成立．如 $c, \gamma\to 0, -1, -2, \cdots$，則先乘以 $[\Gamma(c)]^{-1}$ 或 $[\Gamma(\gamma)]^{-1}$，或两者而后令 c 或 γ 都趋向 $0, -1, -2, \cdots$，仍可得一正确的公式．作为这些公式的一个特例，有

$$(12)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda}{n}s^nF(-n,b;-\lambda;z)\,F(-n,\beta;-\lambda;\zeta)$$
$$=(1+s)^{\lambda+b+\beta}(1+s-sz)^{-b}(1+s-s\zeta)^{-\beta}$$
$$\times F\left[b,\beta;-\lambda;\frac{-z\zeta s}{(1+s-sz)(1+s-s\zeta)}\right];$$

因为 $F(a,b;b;z)=(1-z)^{-a}$，故如 $c=\gamma=-\lambda$，則这些和的一个可以寫成有限形式．如命 (8) 及 (9) 中的 $\zeta=0$，則得：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda}{n}s^nF(-n,b;c;z)=(1+s)^{\lambda}F[-\lambda,b;c;sz/(1+s)],$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda}{n}s^nF(n-\lambda,b;c;z)=(1+s)^{\lambda}F[-\lambda,b;c;z/(1+s)].$$

最后，如命 (12) 中的 $\zeta=0$，則得 (1)．

將橢圓積分理論中的勒上特关系式加以推廣之后，E. B. 依利沃特 (1904) 曾証明：

$$(13)\quad F(\tfrac{1}{2}+\lambda,-\tfrac{1}{2}-\nu;1+\lambda+\mu;z)F(\tfrac{1}{2}-\lambda,\tfrac{1}{2}+\nu;1+\nu+\mu;1-z)$$
$$+F(\tfrac{1}{2}+\lambda,\tfrac{1}{2}-\nu;1+\lambda+\mu;z)F(-\tfrac{1}{2}-\lambda,\tfrac{1}{2}+\nu;1+\nu+\mu;1-z)$$
$$-F(\tfrac{1}{2}+\lambda,\tfrac{1}{2}-\nu;1+\lambda+\mu;z)F(\tfrac{1}{2}-\lambda,\tfrac{1}{2}+\nu;1+\nu+\mu;1-z)$$
$$=\frac{\Gamma(1+\lambda+\mu)\Gamma(1+\nu+\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu+\nu+\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\mu)}.$$

如 $\lambda=\mu=\nu=0$，則由 (13) 得勒上特关系式．这个結果又曾由 A. L. 迪克斯恩 (1905) 加以推廣．

2-5-3. 包含二項式系数及不完全 β-函数的关系式

我們以下面一式來定义 u 的多項式 $\binom{u}{n}$：

$$(14)\quad \binom{u}{n}=(-1)^n\frac{\Gamma(n-u)}{\Gamma(n+1)\Gamma(-u)}=\begin{cases}1, & n=0,\\ u(u-1)(u-2)\cdots(u-n+1)/n! & n=1,2,3,\cdots\end{cases}$$

根据这一定义可有

$$F(1,-u;-v;z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\binom{u}{n}\Big/\binom{v}{n}$$

而根据 2-1 (14) 式，

$$(15)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\binom{u}{n}\Big/\binom{v}{n}=\frac{\Gamma(-v)\,\Gamma(u-v-1)}{\Gamma(-v-1)\,\Gamma(u-v)}=\frac{v+1}{v-u+1}$$

$$=1+\frac{u}{v-u+1}, \qquad \mathrm{Re}(u-v)>1.$$

因为

$$\binom{u}{n+m}=\binom{u}{m}\binom{u-m}{n}n!\,m!/(n+m)!$$

故还可以有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{u}{n+m}\Big/\binom{v}{n+m}=\left[\binom{u}{m}\Big/\binom{v}{m}\right]\sum_{n=0}^{\infty}\binom{u-m}{n}\Big/\binom{v-m}{n}$$

$$=\frac{v-m+1}{v-u+1}\binom{u}{m}\Big/\binom{v}{m},$$

与 (15) 式合并，就可得

$$(16)\quad \sum_{n=0}^{m-1}\binom{u}{n}\Big/\binom{v}{n}=\frac{v+1}{v-u+1}\left[1-\binom{u}{m}\Big/\binom{v+1}{m}\right].$$

方程 (15) 及 (16) 称为"卡奇定理"。

如果在 2-1 (25) 式中取 $z=-1$，并应用 2-1 (14) 式可得

$$F(a,b;1+a-b;-1)=\frac{2^{-a}\Gamma(1+a-b)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1-b+\frac{1}{2}a)\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-a}{n}\binom{-b}{n}\Big/\binom{b-a-1}{n},$$

如令 $a=-m$ (m 为一整数)，则得

$$\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\binom{m}{n}\binom{u}{n}\Big/\binom{m-u-1}{n}=\frac{2^m\Gamma(1-m+u)\sqrt{\pi}}{\Gamma(1+u-\frac{1}{2}m)\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}m)}.$$

同理，超比級数的綫性及二次变換可以用來对包含二項式系数的和式求和，借助于下列方法的一个或几个：

(i) 給 z 以特殊的数值；

(ii) 令 a 或 b 为一負整数；

(iii) 对于超比級数的不同表达式，比較 z 的同次項的系数，例如在 2-1 (22) 式的两边或在同一类型的一个方程式中。

因此，由于 2-1 (14)，我們有 $F(m, -n; 1; 1) = 0$，而这可寫成如下形式：

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n-1}(m+n-1)!}{n!\,n!\,(m-n)!} = 1/m.$$

另一个例子就是 2-1 (30) 的薩尔苏茨公式.

截尾二項級数

$$\sum_{n=0}^{m-1} \binom{a}{n} z^n$$

可以用二个超比級数來表示，即

$$F(1, -a; 1; -z) - z^m \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+1-m)\,m!} F(m-a, 1; m+1; -z)$$

或表示为：

$$\binom{a}{m-1} z^{m-1} F(1-m, 1; a-m+2; -z^{-1})$$

$$a \neq m-2, m-3, \cdots 0.$$

不全 β 函数

在数学統計学中，可遇到如下的函数

$$B_x(p, q) = \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$$

及

$$I_x(p, q) = B_x(p, q)/B_1(p, q)$$

$B_x(p, q)$ 叫做不全 β 函数.

$$B_x(p, q) = p^{-1} x^p F(p, 1-q; p+1; x)$$

$$B_1(p, q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q).$$

由 2-8 (31) 至 2-8 (45) 式可導出下列遞推关系 [其应用可参看 T. A. Bancroft (1949)]：

$$x I_x(p, q) - I_x(p+1, q) + (1-x) I_x(p+1, q-1) = 0,$$

$$(p+q-px) I_x(p, q) - q I_x(p, q+1) - p(1-x) I_x(p+1, q-1) = 0,$$

$$q I_x(p, q+1) + p I_x(p+1, q) - (p+q) I_x(p, q) = 0.$$

2-5-4. 連分式

高斯 (1812) [見 Gauss (1876)] 曾对某些連帶超比級数的商求出了連分式. 下面是一个典型的例子：

$$\frac{F(a, b+1; c+1; z)}{F(a, b; c; z)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{u_1 z}{1-\cfrac{v_1 z}{1-\cfrac{u_2 z}{1-\cfrac{v_2 z}{\cdots}}}}}$$

其中
$$u_n = \frac{(a+n-1)(c-b+n-1)}{(c+2n-2)(c+2n-1)},$$
$$v_n = \frac{(b+n)(c-a+n)}{(c+2n-1)(c+2n)} \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

当 $b=0$，则得 $F(a, 1; c; z)$ 的連分式．

2-5-5．超比函数的特殊情形

在很多情况下，超比級数簡化为一个初等函数的展开式．在退化情形下，2-1 (1) 式的解至少有一个常是初等函数．从二次变换式 1-5 (24) 中，取 $b \to 0$ 时的極限，可得形如下式的結果：

$$F(a, a+\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}; z) = \tfrac{1}{2}(1-z^{\frac{1}{2}})^{-2a} + \tfrac{1}{2}(1+z^{\frac{1}{2}})^{-2a}.$$

$F(a, b; c; z)$ 为一初等函数的其他許多情形列举于 2-8 (4) 至 2-8 (17) 的公式中．所有这些公式或者可直接証明或者可从綫性及二次变换中導出．

曾被特別研究过的或出現于其他函数理論中的其他特殊超比函数列于下表：

特殊超比函数

参数 a, b, c	变数	名称	章次
$1-c$, $\pm(a-b)$, $\pm(c-a-b)$ 中有二个彼此相等或其中一个等于 $\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z$	勒让特函数	3
$-n, n+2v; v+\frac{1}{2}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z$	蓋根鮑多項式	10, 11
$-n, \alpha+n; \gamma$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$	z	雅可比多項式	10, 11
$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$ $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$	z^2 z^2	完全的橢圓積分	13
$1/l, 1/m, 1/n$ 或零 $(l, m, n=1, 2, 3\cdots)$ 2-1 (1) 的二个解的商	z	反自守函数	14
数 $a, b, c-a, c-b$ 之一是一整数	z	退化情形	2-2
$c-a=1$	z	不全 B-函数	2 5 3

2-6. 黎曼方程

2-6-1. 化为超比方程

本節所述理論的証明可参看 E. G. C. 浦耳的著作(1936). 如果一个二階綫性齐次微分方程只有三个奇点,并設这些奇点都是正则型(見 Poole 1936),则方程可寫成如下形式:

$$
(1)\qquad \frac{d^2u}{dz^2}+\left(\sum_{n=1}^{3}\frac{1-\alpha_n-\alpha_n'}{z-z_n}\right)\frac{du}{dz}
+\left[\sum_{n=1}^{3}\frac{\alpha_n\alpha_n'(z_n-z_{n+1})(z_n-z_{n+2})}{z-z_n}\right]
\times\frac{u}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}=0.
$$

此处 α_n, α_n', z_n 都是常数, $z_4=z_2$, $z_5=z_3$ 但 $z_1\neq z_2\neq z_3\neq z_1$ 且

$$
(2)\qquad \sum_{n=1}^{3}(\alpha_n+\alpha_n')=1.
$$

奇点在 $z=z_n(n=1, 2, 3)$; 常数 α_n, α_n' 称为屬于 $z=z_n$ 的指数. 我們可讓奇点之一在無窮远. (1) 式中的 du/dz 及 u 的系数可以从適当的極限法中得出.

我們把(1)式称为黎曼方程. 通常又称为巴波列茨方程.

常数 $\lambda_n=\alpha_n-\alpha_n'$ 称为指数差分,如果它們中沒有一个是整数,则对于 $z=z_n$ 的鄰域來說, (1) 有二个綫性独立的解 $u_1(z)$, $u_2(z)$, 而

$$
(3)\qquad \begin{cases} u_1(z)=(z-z_n)^{\alpha_n}\sum\limits_{m=0}^{\infty}v_m(z-z_n)^m \\ u_2(z)=(z-z_n)^{\alpha'_n}\sum\limits_{m=0}^{\infty}v_m'(z-z_n)^m \end{cases}
$$

当然, v_m, v_m' 可依賴于 z_1, z_2, z_3 但不依賴于 z, 且 $v_0\neq 0$, $v_0'\neq 0$. 如一个或几个指数差分是整数,则(3)的一个或几个級数將含有对数的項. 因为我們將可把(1)導成超比方程,所以对于对数的情形我們完全可以参照上節的情形处理.

我們以符号

$$(4)\qquad P\begin{Bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \end{Bmatrix}$$

代表方程 (1) 的解的全集. B. 黎曼 (1892) 曾証明:

$$(5)\qquad \left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)^{\rho}\left(\frac{z-z_3}{z-z_2}\right)^{\sigma} P\begin{Bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \end{Bmatrix}$$

$$= P\begin{Bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \\ \alpha_1+\rho & \alpha_2-\rho-\sigma & \alpha_3+\sigma & z \\ \alpha_1'+\rho & \alpha_2'-\rho-\sigma & \alpha_3'+\sigma & \end{Bmatrix}$$

且

$$(6)\qquad P\begin{Bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \zeta \\ \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \end{Bmatrix}$$

其中

$$(7)\qquad \zeta=\frac{Az+B}{Cz+D},\quad \zeta_n=\frac{Az_n+B}{Cz_n+D},$$

A, B, C, D 为任意常数,合乎条件 $AD-CB\neq 0$. 由 (5) 可見 (1) 的一个解与因子

$$\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)^{\rho}\left(\frac{z-z_3}{z-z_2}\right)^{\sigma}$$

的積亦滿足黎曼方程. 当然我們可以变換(5)式中的下标 1, 2, 3. 如果 $z_n=\infty$, 則(5)式中的 $z-z_n$ 应以 1 代替.

如果 z_1, z_2, z_3 为已知,我們常可找到四个常数 A, B, C, D, 使之滿足条件 $AD-BC\neq 0$, 而 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ 是三个任意設定的常数. 所以(6)式表明我們常可用变数的一个对应代换把(1)变换为黎曼方程,其奇点在 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$.

合并 (5) (6) 两式,得

$$(8)\qquad P\begin{Bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \end{Bmatrix}=\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{z-z_3}{z-z_2}\right)^{\alpha_3}$$

$$\times P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 & 0 & \dfrac{(z-z_1)}{(z-z_2)}\dfrac{(z_3-z_2)}{(z_3-z_1)} \\ \alpha_1'-\alpha_1 & \alpha_1+\alpha_2'+\alpha_3 & \alpha_3'-\alpha_3 & \end{Bmatrix}.$$

今超比方程 2-1 (1) 是黎曼方程的一个特殊情形．也就是說

$$(9)\qquad P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & a & 0 & z \\ 1-c & b & c-a-b & \end{Bmatrix}$$

是超比方程的所有解的集合．故 (8) 把最普遍的黎曼方程化成为 2-1 (1) 的一个特殊情形．因为超比方程可有 24 个不同方法來变換成自己，故这个轉化是不能唯一地确定的．这可用下面所述來說明．超比方程之归屬于黎曼方程是由于它的奇点在 $0, \infty, 1$，它在这些点上的指数差分分别为 $1-c$, $a-b$, $c-a-b$，也由于在 $z=0$ 及 $z=1$ 的一个指数等于零．六个对应变換

$$(10)\qquad \zeta=z,\ 1-z,\ z/(1-z),\ z^{-1},\ (1-z)^{-1},\ 1-z^{-1}$$

引出了奇点的六种可能排列．如果我們以 $z^{\rho}(1-z)^{\tau}$ 去乘奇点在 $z=0, \infty, 1$ 的黎曼方程的解，則我們总可选擇 ρ 及 τ 使 $z=0$ 及 $z=1$ 处的一个指数变成零．因为我們在每一个这些点上的两个指数之間作选擇，故可得 2-1 (1) 式化成它本身的 $2\cdot2\cdot6=24$ 个变換．这就引出了 24 个解，其形式为

$$z^{\rho}(1-z)^{\sigma}F(a^*, b^*; c^*; z^*)$$

其中 z^* 是 (10) 式中的一个式子，a^*, b^*, c^* 是 a, b, c 的綫性函数．这种解称为康曼尔級数；它們列举在 2-9 (1) 至 2-9 (24) 式中．这 24 个解可以分为六組，使每組中的四个級数表示同一函数；这六組一般是互不相同的函数，將以 $u_1, u_2, \cdots u_6$ 代表．

这六組中每三組可以用常系数綫性关系來联系，結果得 20 个綫性关連式（在半平面 $\operatorname{Re} z>0$ 內有效），它們是 2-9 (25) 至 2-9 (44) 式．

2-6-2. 二次及三次变換

下列关系是超比級数二次及三次变換的依据:

$$(11)\quad P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \frac{1}{2} & \alpha_2' & \alpha_3' & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} -1 & \infty & 1 & \\ \alpha_3 & 2\alpha_2 & \alpha_3 & z^{\frac{1}{2}} \\ \alpha_3' & 2\alpha_2' & \alpha_3 & \end{Bmatrix}$$

$$= P\begin{Bmatrix} -1 & \infty & 1 & \\ \alpha_2 & 2\alpha_3 & \alpha_2 & \dfrac{z^{\frac{1}{2}}}{(z-1)^{\frac{1}{2}}} \\ \alpha_2' & 2\alpha_3' & \alpha_2 & \end{Bmatrix}$$

其中 $\alpha_2+\alpha_2'+\alpha_3+\alpha_3'=\frac{1}{2}$, 且

$$(12)\quad P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & 0 & \alpha_3 & z \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \alpha_3' & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} 1 & w & w^2 & \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 & z^{\frac{1}{3}} \\ \alpha_3' & \alpha_3' & \alpha_3' & \end{Bmatrix}$$

其中 $\alpha_3+\alpha_3'=\frac{1}{3}$ 且 $w=\exp(2\pi i/3)$. 所有这二个式子都是 B. 黎曼所發現,并由 E. 戈尔薩特 (1881) 研究过 [并見 E. W. Barnes (1908) 及 G. N. Watson (1909) 的著作].

在所有常数都是有理数的稀少情形下,还存在有更高次的变換. 可参看 E. 戈尔薩特 (1881), (1938) 的著作.

2-7. 保形表示

(对于本節的敘述,可参看戈尔薩特 1936, 1938 的著作).

2-7-1. 超比方程的羣

如果指数差分 $1-c$, $b-a$, $c-a-b$ 中沒有一个是整数,則

$$(1)\quad \begin{cases} u_1(z) = F(a, b; c; z) \\ u_2(z) = z^{1-c}F(a-c+1, b-c+1; 2-c; z) \end{cases}$$

是 2-1 (1) 的二个綫性独立解,在区域 $|z-\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}$ 内單值而正則,但在三点 $z=0, \infty, 1$ 的每一点上,两个解中至少有一个具有一支点. 我們現在來考查一下当 z 描画一閉綫(例如以 $z=\frac{1}{2}$ 为起点及終点),包含一个或几个支点时对二个解(13)所生的影响. 我們可以把这个問題轉化如下. 二个起迄于 $z=\frac{1}{2}$, 包含 $z=0$ 及 $z=1$

的單正回路 $C_{(0)}C_{(1)}$ 將產生怎样的影响？任一迴綫的影响可以化为一連串的迴綫 $C_{(0)}$, $C_{(1)}$ 及 $C'_{(0)}$, $C'_{(1)}$ 的影响，其中一撇表示对应的負迴綫. 現在从 2-9 (25) 至 2-9 (44) 式中，可知 u_1 及 u_2 所受 $C_{(0)}$ 及 $C_{(1)}$ 的影响有如箭头所示.

(2) $$C_0\begin{cases}u_1\to u_1\\ u_2\to e^{-2i\pi c}u_2,\end{cases}$$

(3) $$C_{(1)}\begin{cases}u_1\to B_{11}u_1+B_{12}u_2\\ u_2\to B_{21}u_1+B_{22}u_2\end{cases}$$

其中

$$B_{11}=1-2ie^{i\pi(c-a-b)}\frac{\sin(\pi a)\sin(\pi b)}{\sin(\pi c)},$$

$$B_{12}=-2i\pi e^{i\pi(c-a-b)}\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(b)\Gamma(a)},$$

$$B_{21}=2i\pi e^{i\pi(c-a-b)}\frac{\Gamma(2-c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+b-c)},$$

$$B_{22}=1+2ie^{i\pi(c-a-b)}\frac{\sin\pi(c-a)\sin\pi(c-b)}{\sin(\pi c)}.$$

(2) 的証明是不言而喻的. 为了証明 (3)，我們从下面的公式开始[見 2-10 (1)]:

$$\begin{aligned}F(a,b;c;z)&=\lambda_{11}F(a,b;a+b-c+1;1-z)\\&\quad+\lambda_{12}(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c-a-b+1;1-z),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&z^{1-c}F(a-c+1,b-c+1;2-c;z)\\&=\lambda_{21}z^{1-c}F(a-c+1,b-c+1;a+b-c+1;1-z)\\&\quad+\lambda_{22}(1-z)^{c-a-b}z^{1-c}F(1-a,1-b;c-a-b+1;1-z)\\&=\lambda_{21}F(a,b;a+b-c+1;1-z)\\&\quad+\lambda_{22}(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c-a-b+1;1-z).\end{aligned}$$

这就給出

$$\begin{cases}\lambda_{22}u_1-\lambda_{12}u_2=(\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}\lambda_{21})F(a,b;a+b-c+1;1-z)\\ \lambda_{21}u_1-\lambda_{11}u_2=(\lambda_{12}\lambda_{21}-\lambda_{11}\lambda_{22})(1-z)^{c-a-b}\\ \qquad\times F(c-a,c-b;c-a-b+1;1-z),\end{cases}$$

从这些方程可得

$$C_{(1)}\begin{cases}\lambda_{22}u_1-\lambda_{12}u_2\to\lambda_{22}u_1-\lambda_{12}u_2\\ \lambda_{21}u_1-\lambda_{11}u_2\to\exp[2\pi i(c-a-b)](\lambda_{21}u_1-\lambda_{11}u_2).\end{cases}$$

此处

$$\begin{cases}\lambda_{11}=\dfrac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, & \lambda_{12}=\dfrac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\\ \lambda_{21}=\dfrac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}, & \lambda_{22}=\dfrac{\Gamma(2-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)}\end{cases}$$

(3) 的証明的余下部分不过是將適用于 γ-函数的基本公式重复运用一下就是.

起迄于一个固定点(例如 $z=\frac{1}{2}$) 的任一閉回路对 u_1, u_2 所生的影响可用綫性代換來描述;这些綫性代換的全集組成一个羣——超比方程的羣. 这个羣的所有代換可从(2), (3)式的組合來得出. 通常 $u_1(z)/u_2(z)$ 的对应代換集也称为超比方程的羣. 如果 c 異于 0, ±1, ±2, $\cdots$, 則 (2) 及 (3) 常是有意义的. 顯然,倘数 a, b, $c-a$, $c-b$ 中至少有一个是整数,則不論 u_1 或 u_2, 在任一閉回路之后僅是乘上了一个常数. 这就变成了 2-2 節中所述的退化情形. 如果 c 是整数,則就有必要变更一下 (2) 及 (3). 为此我們可应用 2-1 (18), 2-1 (14), 2-2 (4) 及 2-10(7) 至 2-10(15)各式. 例如,在非退化情形下, $a=b=\frac{1}{2}$, $c=1$、所有三个指数差分 $1-c$, $b-a$, $c-a-b$ 都等于零,此时我們可取

$$\begin{cases}u_1=F(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;z)\\ u_2=iF(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;1-z).\end{cases}$$

于是可得

$$(4)\qquad C_{(0)}\begin{cases}u_1\to u_1,\\ u_2\to 2u_1+u_2,\end{cases}$$

$$(5)\qquad C_{(1)}\begin{cases}u_1\to u_1-2u_2,\\ u_2\to u_2.\end{cases}$$

这些結果可从下式導出

$$(6)\qquad \tfrac{1}{2}\pi F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};1;z)+\tfrac{1}{2}\ln(1-z)F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};1;1-z)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{2})_n}{n!\,n!}[\psi(n+1)-\psi(n+\tfrac{1}{2})](1-z)^n$$

这个式子可从 2-1 (15) 用 2-1-4 節的方法得出.

B. 黎曼曾証明 [見 Poole 1936] 連帶超比方程具有同样的对应代換羣. 由此可知, 任意三个系数为变量的有理函数的連帶超比方程之間存在着一个綫性关連.

2-7-2. 許瓦兹函数

[參考 Kampéde Fériet (1937), Poole (1936)].

今后我們將以

(7) $1-c=\lambda,\quad b-a=\mu,\quad c-a-b=\nu$

代表指数差分. 如 u 是超比方程的一个解, 则

$$y(z)=z^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda}(1-z)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}u(z)$$

满足方程

(8) $$\frac{d^2y}{dz^2}+I(\lambda,\mu;\nu;z)\,y=0$$

其中

(9) $$I(\lambda,\mu;\nu;z)=\frac{1-\lambda^2}{4z^2}+\frac{1-\nu^2}{4(1-z)^2}+\frac{1-\lambda^2+\mu^2-\nu^2}{4z(1-z)}.$$

以下式来定义一函数的許瓦兹導数 $\{w,z\}$

$$\{w,z\}=\frac{d^3w}{dz^3}\Big/\frac{dw}{dz}-\frac{3}{2}\left(\frac{d^2w}{dz^2}\Big/\frac{dw}{dz}\right)^2$$

并令 $$w(z)=y_1(z)/y_2(z)$$

其中 y_1 及 y_2 为 (8) 的二个綫性独立解. 于是

(10) $\{w,z\}=2I(\lambda,\mu;\nu;z).$

如果 ζ 是 z 的一个函数, 则可得卡莱袼等式:

(11) $$\{w,z\}=\{w,\zeta\}\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^2+\{\zeta,z\}.$$

又

(12) $$\left\{\frac{Ax+B}{Cx+D},x\right\}=\left\{x,\frac{Ax+B}{Cx+D}\right\}=0.$$

其中 A, B, C, D 为常数, 满足条件 $AD-BC\neq 0$. 因此, 如

$$\zeta=(Aw+B)/(Cw+D),$$

則
$$\{w, z\} = \left\{\frac{Aw+B}{Cw+D}, z\right\}.$$

这説明如 $w(z)$ 是 (10) 的一个解,則 $(Aw+B)/(Cw+D)$ 亦滿足 (10), 而且可以証明 (10) 的所有解都具有这种形式. 所以如果我們已知 (8) 的二个綫性独立解,就可求得 (10) 的全部解. 另一方面,如 $w(z)$ 是 (10) 的一个解,則 $w(z)$ 不能是一常数,除非 $\lambda^2=\mu^2=\nu^2=1$. 不考慮这种情形,則得

$$(13)\quad y_1(z) = w\left(\frac{dw}{dz}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad y_2(z) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

它是 (8) 的二个綫性独立解.

我們將以 $s(\mu, \nu, \lambda; z)$ 代表 (10) 式的解的全集,并称 s 为一般許瓦茲函数. 一个特殊的許瓦茲函数將以 $S(\mu, \nu, \lambda; z)$ 表示. 可以証明函数 $s(\lambda, \mu, \nu; z)$ 在 $z\neq 0, \infty, 1$, 的任一点的鄰域內是个半純函数,而且 w 与 s 的对应是局部地一一的(單叶的),因为 ds/dz 或 s 有一極点时在所有 $z\neq 0, \infty, 1$ 等点上 ds^{-1}/dz 均異于零. 这是由于

$$\frac{ds}{dz} = \left(y_1\frac{dy_2}{dz} - y_2\frac{dy_1}{dz}\right)/y_2^2.$$

此处分子是一常数.

如果在特殊情况下 λ, μ, ν 是实数,我們可以用連帶超比級数的理論(見 2-1 2 及 2-7-1 節)來証明函数

$$s(l\pm\lambda, m+\mu, n\pm\nu; z)$$
$$l, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

在 $l+m+n$ 为偶数时將起源于同一羣的超比函数. 在这些函数中有一集我們將称之为簡化集,对于它們有:

$$0\leqslant\lambda, \mu, \nu<1, \quad 0\leqslant\mu+\nu, \quad \nu+\lambda, \quad \lambda+\mu\leqslant 1.$$

許瓦茲 (1873) 曾証明过一个簡化函数 $\tau=S(\lambda, \mu, \nu; z)$ 將上半平面 $\mathrm{Im}\, z\geqslant 0$ 映射于 τ-平面的一个三角形 Δ_0 上,三角形 Δ_0 由 τ-平面上互不重叠的三段圓弧(其中有些可以是直綫段)圍成,其对应于三个点 $z=0, \infty, 1$ 的內角分別为 $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$. 此处所說的"內"是指包含对应点如 $z=i$ 的三角形所圍成的区域而言.

从許瓦茲的对称原則可知 $\tau=S(\lambda, \mu, \nu; z)$ 的全部分支系將 z-平面映射于复蓋 τ-平面的黎曼曲面上，τ-平面由 Δ_0 及由下述方法从 Δ_0 作出的全部三角形組成．如果已知一个圓(或作为圓的極限情形的一直綫)，則我們可以下述代換在 τ-平面本身上作映射

$$\tau'=\frac{\alpha_{11}\bar{\tau}+\alpha_{12}}{\alpha_{21}\bar{\tau}+\alpha_{22}}$$

其中 τ' 是对应于 τ 的点，$\bar{\tau}$ 是 τ 的共軛复数，使对于圓上的点有 $\tau=\tau'$．我們將称这为**关于圓的反演**．完成对外接于三角形 Δ_0 的圓的反演，这就可映射出三个新的三角形 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$，它們仍是由圓弧圍成，完成对这些新三角形边界圓的反演就可再得出新的三角形，以此类推．如果这样映出的三角形中任何二个都不重叠，則函数 $\tau=S(\lambda, \mu, \nu; z)$ 有一个半純的單值反函数

(14) $\quad z=\phi(\lambda, \mu, \nu; z)$

这种函数称为自守函数．具有这种性質的函数 ϕ 的存在的一个必要条件是 λ, μ, ν 必須等于零或等于整数的倒数．

$s(\lambda, \mu, \nu; z)$是代数函数时，λ, μ, ν 的值共有15个簡化集．H. A. 許瓦茲(1873)曾全部將它們列出，如下表(表中的 №. 1 实际包括無窮多种情形)．这里 n, p 是非負整数，而 $2p<n$.

許 瓦 茲 表

№.	λ	μ	ν
1	1/2	1/2	p/n
2	1/2	1/3	1/3
3	2/3	1/3	1/3
4	1/2	1/3	1/4
5	2/3	1/4	1/4
6	1/2	1/3	1/5
7	2/5	1/3	1/3
8	2/3	1/5	1/5
9	1/2	2/5	1/5
10	3/5	1/3	1/5
11	2/5	2/5	2/5
12	2/3	1/3	1/5
13	4/5	1/5	1/5
14	1/2	2/5	1/3
15	3/5	2/5	1/3

在 $1(p=1)$, 2, 4, 6 的情形下，反函数 $\phi(\lambda, \mu, \nu; \tau)$ 是有理函数．特别是，可取

$$\phi(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1/n; \tau) = \left(\frac{\tau^n - 1}{\tau^n + 1}\right)^2.$$

在 $\lambda = \mu = \nu = 0$ 的情况下如果我們取

$$\tau = S(0, 0, 0, z) = i\frac{F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1-z)}{F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; z)}$$

則可得一特殊的自守函数，与此相对应的反函数 $z(\tau)$ 常以 $k^2(\tau)$ 來表示，称为**橢圓模函数**．这种函数是一部巨著的主体，参看 14 章及凱林与弗立克(1890, 1892)的著作，对于一般的自守函数可参看弗立克及凱林(1897)的著作．$k^2(\tau)$ 的一个顯式是

$$k^2(\tau) = (\theta_2/\theta_3)^4,$$

其中

$$\theta_2 = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{i\pi\tau(n+\frac{1}{2})^2} = e^{i\pi/4}\tau^{-\frac{1}{2}}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-i\pi n^2/\tau}\right]$$

$$\theta_3 = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\pi\tau n^2} = e^{i\pi/4}\tau^{-\frac{1}{2}}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-i\pi n^2/\tau}\right)$$

是 τ 的函数，当且僅当 $\operatorname{Im}\tau > 0$ 时正則（見 Whittaker-Watson 1927, 及 21-7 22-3 節）．

2-7-3. 均匀化

如果我們引進一个新变量 τ 使（見 2-7-2）

$$z = k^2(\tau),$$

則 $F(a, b; c; z)$ 变成 τ 的一个單値函数，定义于半平面 $\operatorname{Im}\tau > 0$，且在其内正則．魏丁格 (1902, 1903) 曾証明这样的公式

$$(15)\quad \tfrac{1}{2}\Gamma(b)\Gamma(c-b)\,F[a, b; c; k^2(\tau)] = \pi^{2b}\Gamma(c)\,[\theta_3(0, \tau)]^{4b}\int_0^1 \Phi(u, \tau)\,du.$$

其中

$$\Phi(u, \tau) = \left[\frac{\theta_1(u, \tau)}{\theta_1(0, \tau)}\right]^{2b-1}\left[\frac{\theta_2(u, \tau)}{\theta_2(0, \tau)}\right]^{2(c-b)-1} \times \left[\frac{\theta_3(u, \tau)}{\theta_3(0, \tau)}\right]^{1-2a}\left[\frac{\theta_4(u, \tau)}{\theta_4(0, \tau)}\right]^{1-2(c-a)}$$

函数 $\theta_i(u,\tau)\,(i=1,2,3,4)$ 是四个雅可比 θ-函数（見 13 章）．如果条件 $\operatorname{Re} c>\operatorname{Re} b>0$ 不成立，則 (15) 式中的積分应以閉綫積分來代替（見 2-1-3）．

2-7-4. 零点

設 $u(a, b; c; z)$ 是 2-1 (1) 的一个解的一單值枝，在半平面 $z\geqslant 0$ 上定义，点 $0, \infty, 1$ 可能例外．則方程

(16)　$u(a, b; c; z)=A$

在 A 为任一給定的常数时只能被有限个 z 值所滿足．这是由于 2-1 (1) 的解可以 2-10 (1) 至 2-10 (5) 的方法向奇点 $0, \infty, 1$ 的鄰域擴展．由此可知 u 在这种点上的性态可以下列形式的簡單項來确定：

$$v_0(z)=c_0(z-z_0)^{d_0} \quad \text{或} \quad v_0(z)=c_0(z-z_0)^{d_0}\ln(z-z_0)$$

此处 $z_0=0, \infty, 1$，如 $z_0=\infty$，則 $z-z_0$ 应以 z^{-1} 代替．这就是說如 $z\to z_0$，則 u/v_0 趋近于一个不等于零的确定的值．故 (16) 在 $0, \infty, 1$ 的足夠小的鄰域內只能有确定数的解（如果限制于区域 $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ 因而限制于 v_0 的一个單值分枝）．在上部半平面的其余部分中，z 是正則的，因而 (16) 只能在这里的有限个点上適合．

在 a, b, c 是实数的情形下，$u(a, b; c; z)$ 單值分枝上的零点的数目（即在 $A=0$ 时 (16) 的解的数）曾由赫威玆 (1907)，万·維立克 (1901, 1902) 赫格洛兹 (1917) 确定过．后面几个作者所用的方法是与 2-7 (1) 及 2-7 (2) 的結果緊密联系的．

在多項式

$$u=F(-n, \alpha+n; \gamma; z) \qquad n=0, 1, 2, \cdots$$

中 α, γ 是实数，$\gamma>0$，$\alpha+1-\gamma>0$ 的情况下，所有零点都是实数并在区間 $0<z<1$（見第 10 章雅可比多項式）．

第二部分：公式部分

2-8. 超比級数

$$(1) \qquad F(a, b; c; z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}z^n \qquad c\neq 0, -1, -2, \cdots$$

(2) $\begin{cases}(a)_0=1\\(a)_n=\Gamma(a+n)/\Gamma(a)=a(a+1)\cdots(a+n-1),\end{cases}$

$$n=1, 2, 3, \cdots$$

如果 $c=-m-l$, 其中 $m,\ l=0, 1, 2, \cdots$, 则

(3) $$F(-m, b, -m-l; z)=\sum_{n=0}^{m}\frac{(-m)_n(b)_n}{(-m-l)_n n!}z^n.$$

下面是几个可以用超比級数表示的初等函数(見 2-2-1 及 2-5-5)

(4) $$(1+z)^a=F(-a, b; b; -z).$$

(5) $$\tfrac{1}{2}(1+z^{\frac{1}{2}})^{-2a}+\tfrac{1}{2}(1-z^{\frac{1}{2}})^{-2a}=F(a, a+\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}; z).$$

(6) $$[\tfrac{1}{2}+(1-z)^{\frac{1}{2}}/2]^{1-2a}=F(a-\tfrac{1}{2}, a; 2a; z)$$
$$=(1-z)^{\frac{1}{2}}F(a, a+\tfrac{1}{2}; 2a; z).$$

(7) $$(1-z)^{-2a-1}(1+z)=F(2a, a+1; a; z).$$

从而有截尾二項級数:

(8) $$1+\binom{a}{1}z+\cdots+\binom{a}{m}z^n=\binom{a}{m}z^n F(-m, 1; a-m+1; -z^{-1}).$$

(9) $$\sum_{n=m+1}^{\infty}\binom{a}{n}z^n=z^{m+1}\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-m)(m+1)!}F(m+1-a, 1; m+2; -z).$$

(10) $$e^{-az}=(2\operatorname{ch} z)^{-a}\operatorname{th} z\, F[1+\tfrac{1}{2}a, \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}a; 1+a; (\operatorname{ch} z)^{-2}].$$

(11) $$\cos az=F[\tfrac{1}{2}a, -\tfrac{1}{2}a; \tfrac{1}{2}; (\sin z)^2]$$
$$=\cos z\, F[\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}a, \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}a; \tfrac{1}{2}; (\sin z)^2]$$
$$=(\cos z)^a F[-\tfrac{1}{2}a, \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}a; \tfrac{1}{2}; -(\tan z)^2].$$

(12) $$\sin az=a\sin z\, F[\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}a, \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}a; \tfrac{3}{2}; (\sin z)^2]$$
$$=a\sin z\cos z\, F[1+\tfrac{1}{2}a, 1-\tfrac{1}{2}a; \tfrac{3}{2}; (\sin z)^2].$$

(13) $$\sin^{-1}z=zF[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}; z^2).$$

(14) $$\tan^{-1}z=zF(\tfrac{1}{2}, 1; \tfrac{3}{2}; -z^2).$$

(15) $$\ln(z+1)=zF(1, 1; 2; -z).$$

(16) $$\ln\frac{1+z}{1-z}=2zF(\tfrac{1}{2}, 1; \tfrac{3}{2}; z^2).$$

(17) $$\frac{d^n}{dz^n}[z^{n+c-1}(1-z)^{b-c}]=(c)_n z^{c-1}(1-z)^{b-c-n}F(-n, b; c; z).$$

基本关系

(18) $F(a, b; c; z) = F(b, a; c; z).$

(19) $\lim\limits_{c\to -n} [\Gamma(c)]^{-1} F(a, b; c; z)$

$$= \frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1} F(a+n+1, b+n+1; n+2; z).$$

(20) $$\frac{d^n}{dz^n} F(a, b; c; z) = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} F(a+n, b+n; c+n; z).$$

(21) $$(a)_n z^{a-1} F(a+n, b; c; z) = \frac{d^n}{dz^n} [z^{a+n-1} F(a, b; c; z)].$$

(22) $$(c-n)_n z^{c-1-n} F(a, b; c-n; z) = \frac{d^n}{dz^n} [z^{c-1} F(a, b; c; z)].$$

(23) $(c-a)_n z^{c-a-1} (1-z)^{a+b-c-n} F(a-n, b; c; z)$

$$= \frac{d^n}{dz^n} [z^{c-a+n-1} (1-z)^{a+b-c} F(a, b; c; z)].$$

(24) $$\frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n} (1-z)^{a+b-c-n} F(a, b; c+n; z)$$

$$= \frac{d^n}{dz^n} [(1-z)^{a+b-c} F(a, b; c; z)].$$

(25) $$\frac{(-1)^n (a)_n (c-b)_n}{(c)_n} (1-z)^{a-1} F(a+n, b; c+n; z)$$

$$= \frac{d^n}{dz^n} [(1-z)^{a+n-1} F(a, b; c; z)].$$

(26) $(c-n)_n z^{c-1-n} (1-z)^{b-c} F(a-n, b; c-n; z)$

$$= \frac{d^n}{dz^n} [z^{c-1} (1-z)^{b-c+n} F(a, b; c; z)].$$

(27) $(c-n)_n z^{c-1-n} (1-z)^{a+b-c-n} F(a-n, b-n; c-n; z)$

$$= \frac{d^n}{dz^n} [z^{c-1} (1-z)^{a+b-c} F(a, b; c; z)].$$

在二个参数是常数的情形下，鄰接超比級数之間的关系如下：

(28) $(c-a) F(a-1, b; c; z) + (2a-c-az+bz) F(a, b; c; z)$

$$+ a(z-1) F(a+1, b; c; z) = 0.$$

(29)　$(c-b)F(a, b-1; c; z)+(2b-c-bz+az)F(a, b; c; z)$
$+b(z-1)F(a, b+1; c; z)=0.$

(30)　$c(c-1)(z-1)F(a, b; c-1; z)+c[c-1-(2c-a-b-1)z]$
$\times F(a, b; c; z)+(c-a)(c-b)zF(a, b; c+1; z)=0.$

鄰接函数間15个高斯关系式[F 代表 $F(a, b; c; z)$, $F(a\pm1)$, $F(b\pm1)$, $F(c\pm1)$ 分别代表 $F(a\pm1, b; c; z)$, $F(a, b\pm1; c; z)$ $F(a, b; c\pm1; z)$].

(31)　$[c-2a-(b-a)z]F+a(1-z)F(a+1)$
$-(c-a)F(a-1)=0.$

(32)　$(b-a)F+aF(a+1)-bF(b+1)=0.$

(33)　$(c-a-b)F+a(1-z)F(a+1)-(c-b)F(b-1)=0.$

(34)　$c[a-(c-b)z]F-ac(1-z)F(a+1)$
$+(c-a)(c-b)zF(c+1)=0.$

(35)　$(c-a-1)F+aF(a+1)-(c-1)F(c-1)=0.$

(36)　$(c-a-b)F-(c-a)F(a-1)+b(1-z)F(b-1)=0.$

(37)　$(b-a)(1-z)F-(c-a)F(a-1)+(c-b)F(b-1)=0.$

(38)　$c(1-z)F-cF(a-1)+(c-b)zF(c+1)=0.$

(39)　$[a-1-(c-b-1)z]F+(c-a)F(a-1)$
$-(c-1)(1-z)F(c-1)=0.$

(40)　$[c-2b+(b-a)z]F+b(1-z)F(b+1)$
$-(c-b)F(b-1)=0.$

(41)　$c[b-(c-a)z]F-bc(1-z)F(b+1)$
$+(c-a)(c-b)zF(c+1)=0.$

(42)　$(c-b-1)F+bF(b+1)-(c-1)F(c-1)=0.$

(43)　$c(1-z)F-cF(b-1)+(c-a)F(c+1)=0.$

(44)　$[b-1-(c-a-1)z]F+(c-b)F(b-1)$
$-(c-1)(1-z)F(c-1)=0.$

(45)　$c[c-1-(2c-a-b-1)z]F+(c-a)(c-b)zF(c+1)$
$-c(c-1)(1-z)F(c-1)=0.$

特殊 z 下的値

(46)　$F(a, b; c; 1) = \dfrac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},$

$c \neq 0, -1, -2, \cdots \ \mathrm{Re}\, c > \mathrm{Re}(a+b).$

(47)　$F(a, b; 1+a-b; -1) = 2^{-a}\dfrac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1-b+\frac{1}{2}a)\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a)}$

$1+a-b \neq 0, -1, -2, \cdots$

(48)　$(a+1)F(-a, 1; b+2; -1) + (b+1)F(-b, 1; a+2; -1)$

$= 2^{a+b+1}\dfrac{\Gamma(a+2)\Gamma(b+2)}{\Gamma(a+b+2)},\qquad a, b \neq -2, -3, -4, \cdots$

(49)　$F(1, a; a+1; -1) = 2a[\psi(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a) - \psi(\frac{1}{2}a)].$

(50)　$F(2a, 2b; a+b+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) = \dfrac{\Gamma(a+b+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(b+\frac{1}{2})},$

$a+b+\frac{1}{2} \neq 0, -1, -2, \cdots$

(51)　$F(a, 1-a; b; \frac{1}{2}) = 2^{1-b}\dfrac{\Gamma(b)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b)\Gamma(\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2})}$

$b \neq 0, -1, -2, \cdots$

(52)　$F(2a, 2b; a+b+1; \frac{1}{2})$

$= \pi^{\frac{1}{2}}(a-b)^{-1}\Gamma(a+b+1)\{[\Gamma(a)\Gamma(b+\frac{1}{2})]^{-1}$

$-[\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(b)]^{-1}\},\qquad a+b+1 \neq 0, -1, -2, \cdots$

(53)　$F(-a, -a+\frac{1}{2}; 2a+\frac{3}{2}; -\frac{1}{3}) = \left(\dfrac{8}{9}\right)^{2a}\dfrac{\Gamma(\frac{4}{3})\Gamma(2a+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(2a+\frac{4}{3})},$

$2a+\frac{3}{2} \neq 0, -1, -2, \cdots$

(54)　$F(3a, 3a+\frac{1}{2}; 3a+\frac{5}{6}; \frac{1}{9}) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{3a}\dfrac{\Gamma(2a+\frac{5}{6})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(a+\frac{5}{6})},$

$2a+\frac{5}{6} \neq 0, -1, -2, \cdots$

(55)　$F(a+\frac{1}{3}, 3a; 2a+\frac{2}{3}; e^{i\pi/3})$

$= 2\pi^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}i\pi a}3^{-\frac{1}{2}(3a+1)}\dfrac{\Gamma(2a+\frac{2}{3})}{\Gamma(a+\frac{1}{3})\Gamma(a+\frac{2}{3})\Gamma(\frac{2}{3})},$

(56) $$F(a+\tfrac{1}{3}, 3a; 2a+\tfrac{2}{3}; e^{-i\pi/3})$$
$$=2\pi e^{-\frac{1}{2}i\pi a}3^{-\frac{1}{2}(3a+1)}\frac{\Gamma(2a+\frac{2}{3})}{\Gamma(a+\frac{1}{3})\Gamma(a+\frac{2}{3})\Gamma(\frac{2}{3})},$$
$$2a+\tfrac{2}{3}\neq 0,\ -1,\ -2,\ \cdots$$

2·9. 康曼尔級数及其相互間的关系

超比方程的康曼尔的 24 个解如下：

(1) $u_1=F(a, b; c; z)$

(2) $\quad=(1-z)^{c-a-b}F(c-a, c-b; c; z)$

(3) $\quad=(1-z)^{-a}F[a, c-b; c; z/(z-1)]$

(4) $\quad=(1-z)^{-b}F[c-a, b; c; z/(z-1)]$

(5) $u_2=F(a, b; a+b+1-c; 1-z)$

(6) $\quad=z^{1-c}F(a+1-c, b+1-c; a+b+1-c; 1-z)$

(7) $\quad=z^{-a}F(a, a+1-c; a+b+1-c; 1-z^{-1})$

(8) $\quad=z^{-b}F(b+1-c, b; a+b+1-c; 1-z^{-1})$

(9) $u_3=(-z)^{-a}F(a, a+1-c; a+1-b; z^{-1})$

(10) $\quad=(-z)^{b-c}(1-z)^{c-a-b}F(1-b, c-b; a+1-b; z^{-1})$

(11) $\quad=(1-z)^{-a}F[a, c-b; a+1-b; (1-z)^{-1}]$

(12) $\quad=(-z)^{1-c}(1-z)^{c-a-1}F[a+1-c, 1-b; a+1-b; (1-z)^{-1}]$

(13) $u_4=(-z)^{-b}F(b+1-c, b; b+1-a; z^{-1})$

(14) $\quad=(-z)^{a-c}(1-z)^{c-a-b}F(1-a, c-a; b+1-a; z^{-1})$

(15) $\quad=(1-z)^{-b}F[b, c-a; b+1-a; (1-z)^{-1}]$

(16) $\quad=(-z)^{1-c}(1-z)^{c-b-1}F[b+1-c, 1-a; b+1-a; (1-z)^{-1}]$

(17) $u_5=z^{1-c}F(a+1-c, b+1-c; 2-c; z)$

(18) $\quad=z^{1-c}(1-z)^{c-a-b}F(1-a, 1-b; 2-c; z)$

(19) $\quad=z^{1-c}(1-z)^{c-a-1}F[a+1-c, 1-b; 2-c; z/(z-1)]$

(20) $\quad=z^{1-c}(1-z)^{c-b-1}F[b+1-c, 1-a; 2-c; z/(z-1)]$

(21) $$u_6=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c+1-a-b;1-z)$$

(22) $$=z^{1-c}(1-z)^{c-a-b}F(1-a,1-b;c+1-a-b;1-z)$$

(23) $$=z^{a-c}(1-z)^{c-a-b}F(c-a,1-a;c+1-a-b;1-z^{-1})$$

(24) $$=z^{b-c}(1-z)^{c-a-b}F(c-b,1-b;c+1-a-b;1-z^{-1})$$

函数 $u_1,\cdots u_6$ 中任何三个均可用常系数线性关连式来联系.这就给出了 20 个关系式,如下:

(25) $$e^{i\pi b}\frac{\Gamma(b)\Gamma(a+1-c)}{\Gamma(a+b+1-c)}u_2=\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}u_1+e^{i\pi(b+1-c)}\frac{\Gamma(a+1-c)\Gamma(c-b)}{\Gamma(a+1-b)}u_3$$

(26) $$e^{i\pi a}\frac{\Gamma(a)\Gamma(b+1-c)}{\Gamma(a+b+1-c)}u_2=\frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}u_1+e^{i\pi(a+1-c)}\frac{\Gamma(b+1-c)\Gamma(c-a)}{\Gamma(b+1-a)}u_4$$

(27) $$e^{i\pi(c-b)}\frac{\Gamma(c-b)\Gamma(1-a)}{\Gamma(c+1-a-b)}u_6=\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}u_1+e^{i\pi(1-b)}\frac{\Gamma(1-a)\Gamma(b)}{\Gamma(b+1-a)}u_4$$

(28) $$e^{i\pi(b+1-c)}\frac{\Gamma(b+1-c)\Gamma(a)}{\Gamma(a+b+1-c)}u_2=\frac{\Gamma(b+1-c)\Gamma(1-b)}{\Gamma(2-c)}u_5+e^{i\pi(b+1-c)}\frac{\Gamma(a)\Gamma(1-b)}{\Gamma(a+1-b)}u_3$$

(29) $$e^{i\pi(c-a)}\frac{\Gamma(c-a)\Gamma(1-b)}{\Gamma(c+1-a-b)}u_6=\frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}u_1+e^{i\pi(1-a)}\frac{\Gamma(1-b)\Gamma(a)}{\Gamma(a+1-b)}u_3$$

(30) $$e^{i\pi(a+1-c)}\frac{\Gamma(a+1-c)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1-c)}u_2=\frac{\Gamma(a+1-c)\Gamma(1-a)}{\Gamma(2-c)}u_5+e^{i\pi(a+1-c)}\frac{\Gamma(b)\Gamma(1-a)}{\Gamma(b+1-a)}u_4$$

$$e^{i\pi(1-b)}\frac{\Gamma(1-b)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c+1-a-b)}u_6=\frac{\Gamma(1-b)\Gamma(b+1-c)}{\Gamma(2-c)}u_5+e^{i\pi(1-b)}\frac{\Gamma(c-a)\Gamma(b+1-c)}{\Gamma(b+1-a)}u_4 \tag{31}$$

$$e^{i\pi(1-a)}\frac{\Gamma(1-a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+1-a-b)}u_6=\frac{\Gamma(1-a)\Gamma(a+1-c)}{\Gamma(2-c)}u_5+e^{i\pi(1-a)}\frac{\Gamma(c-b)\Gamma(a+1-c)}{\Gamma(a+1-b)}u_3 \tag{32}$$

$$u_1=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}u_2+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}u_6 \tag{33}$$

$$=\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)}u_3+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)}u_4 \tag{34}$$

$$u_2=\frac{\Gamma(a+b+1-c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(b+1-c)}u_1+\frac{\Gamma(a+b+1-c)\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}u_5 \tag{35}$$

$$=\frac{\Gamma(a+b+1-c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b+1-c)\Gamma(c)}e^{-i\pi a}u_3+\frac{\Gamma(a+b+1-c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(a)}e^{-i\pi b}u_4 \tag{36}$$

$$u_3=\frac{\Gamma(1-c)\Gamma(a+1-b)}{\Gamma(1-b)\Gamma(a+1-c)}u_1-\frac{\Gamma(c)\Gamma(1-c)\Gamma(a+1-b)}{\Gamma(2-c)\Gamma(c-b)\Gamma(a)}e^{i\pi(c-1)}u_5. \tag{37}$$

$$=\frac{\Gamma(c+1-a-b)\Gamma(a+b-c)\Gamma(a+1-b)}{\Gamma(1-b)\Gamma(c-b)\Gamma(a+b+1-c)}e^{i\pi a}u_2-\frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(a+1-b)}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(a)}e^{i\pi(c-b)}u_6 \tag{38}$$

$$u_4=\frac{\Gamma(1-c)\Gamma(1+b-a)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1+b-c)}u_1-\frac{\Gamma(c)\Gamma(1-c)\Gamma(b+1-a)}{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a)\Gamma(b)}e^{i\pi(c-1)}u_5 \tag{39}$$

$$=\frac{\Gamma(c+1-a-b)\Gamma(a+b-c)\Gamma(b+1-a)}{\Gamma(1-a)\Gamma(c-a)\Gamma(a+b+1-c)}e^{i\pi b}u_2-\frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(b+1-a)}{\Gamma(b+1-c)\Gamma(b)}e^{i\pi(c-a)}u_6 \tag{40}$$

(41) $$u_5=\frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}u_2+\frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(b+1-c)}u_6$$

(42) $$=\frac{\Gamma(2-c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(1-a)\Gamma(b+1-c)}e^{i\pi(1-c)}u_3$$
$$+\frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(1-b)\Gamma(a+1-c)}e^{i\pi(1-c)}u_4$$

(43) $$u_6=\frac{\Gamma(c+1-a-b)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}u_1$$
$$+\frac{\Gamma(c+1-a-b)\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}u_5$$

(44) $$=\frac{\Gamma(c+1-a-b)\Gamma(b-a)}{\Gamma(1-a)\Gamma(c-a)}e^{-i\pi(c-b)}u_3$$
$$+\frac{\Gamma(c+1-a-b)\Gamma(a-b)}{\Gamma(1-b)\Gamma(c-b)}e^{-i\pi(c-a)}u_4$$

这些关系式对于使分子上 γ-因子有限的一切 a, b, c 值，以及对于使所含級数收斂且 $\operatorname{Im} z>0$ 的一切 z 値都成立.

前面八个关系式連系了 $u_1, u_2, \cdots, u_6$ 中的三个，它們并不定义于同一个区域中. 后面的十二个將一个定义于区域 D 的函数用其他两个定义于同一区域 D' 内的函数來表示，此处 $D=D'$. 这种公式可应用于解析开拓.

如 $\operatorname{Im} z<0$，則 (25) 至 (44) 式中的指数函数的自变量符号应予变更.

2-10. 解析开拓

超比級数解析开拓的基本公式如下所列，一般情形是 $1-c$, $b-a$ 及 $c-b-a$ 均非整数 [并見 2-9(1) 至 2-9(4) 及 2-9(33) 至 2-9(44)].

(1) $$F(a, b; c; z)=A_1F(a, b; a+b-c+1; 1-z)$$
$$+A_2(1-z)^{c-a-b}F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z)$$
$$|\arg(1-z)|<\pi.$$

(2) $$F(a,b;c;z)=B_1(-z)^{-a}F(a,1-c+a;1-b+a;z^{-1})$$
$$+B_2(-z)^{-b}F(b,1-c+b;1-a+b;z^{-1});$$
$$|\arg(-z)|<\pi.$$

(3) $$F(a,b;c;z)=B_1(1-z)^{-a}F[a,c-b;a-b+1;(1-z)^{-1}]$$
$$+B_2(1-z)^{-b}F[b,c-a;b-a+1;(1-z)^{-1}]$$
$$|\arg(1-z)|<\pi.$$

(4) $$F(a,b;c;z)=A_1z^{-a}F(a,a+1-c;a+b+1-c;1-z^{-1})$$
$$+A_2z^{a-c}(1-z)^{c-a-b}F(c-a,1-a;c+1-a-b;1-z^{-1})$$
$$|\arg z|<\pi.$$

系数 A_1, B_1, A_2, B_2 如下

(5) $$\begin{cases} A_1=\dfrac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, & A_2=\dfrac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \\ B_1=\dfrac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}, & B_2=\dfrac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}. \end{cases}$$

(6) $$F(a,b;c;z)=(1-z)^{-a}F[a,c-b;c;z/(z-1)]$$
$$=(1-z)^{-b}F[b,c-a;c;z/(z-1)].$$

在对数情形下的 $F(a,b;c;z)$ 的解析开拓如下. l, m, n 代表非負整数

(7) $$F(a,a+m;c;z)\,\Gamma(a+m)/\Gamma(c)$$
$$=\frac{(-z)^{-a-m}}{\Gamma(c-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+m}(1-c+a)_{n+m}}{n!\,(n+m)!}z^{-n}[\ln(-z)+h_n]$$
$$+(-z)^{-a}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\Gamma(m-n)(a)_n}{\Gamma(c-a-n)n!}z^{-n}$$
$$-\pi<\arg(-z)<\pi,\ c-a\ \text{非整数}.$$

(8) $$h_n=\psi(1+m+n)+\psi(1+n)-\psi(a+m+n)$$
$$-\psi(c-a-m-n)=\psi(1+m+n)+\psi(1+n)$$
$$-\psi(a+m+n)-\psi(1-c+a+n+m)$$
$$+\pi\operatorname{ctn}\pi(c-a).$$

上面当 $m=0$ 时 $\sum\limits_{n=0}^{m-1}$ 应作为零.

(9) $F(a, a+m; a+m+l+1; z)\,\Gamma(a+m)/\Gamma(a+m+l+1)$

$$=(-1)^{m+l+1}(-z)^{-a-m}\sum_{n=l+1}^{\infty}\frac{(a)_{n+m}(n-l-1)!}{(n+m)!\,n!}z^{-n}$$

$$+(-z)^{-a}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-n-1)!\,(a)_n}{(m+l-n)!\,n!}z^{-n}$$

$$+\frac{(-z)^{-a-m}}{(l+m)!}\sum_{n=0}^{l}\frac{(a)_{n+m}(-m-l)_{n+m}}{(n+m)!\,n!}z^{-n}[\ln(-z)+h_n']$$

$$-\pi<\arg(-z)<\pi.$$

(10) $h_n'=\psi(1+m+n)+\psi(1+n)-\psi(a+m+n)-\psi(l+1-n).$

(11) $F(n+1, m+n+1; n+m+l+2; z)$

$$=\frac{(n+m+l+1)!\,(-1)^{1+m}}{l!\,n!\,(n+m)!\,(m+l)!}\frac{d^{n+m}}{dz^{n+m}}\left\{(1-z)^{m+l}\frac{d^l}{dz^l}[z^{-1}\ln(1-z)]\right\}$$

(12) $F(a, b; a+b+m; z)/\Gamma(a+b+m)$

$$=\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(a+m)\Gamma(b+m)}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(a)_n(b)_n}{(1-m)_n n!}(1-z)^n$$

$$+\frac{(1-z)^m(-1)^m}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+m)_n(b+m)_n}{(n+m)!\,n!}[h_n''-\ln(1-z)](1-z)^n$$

$$-\pi<\arg(1-z)<\pi,\quad a, b, \neq 0, -1, -2, \cdots$$

(13) $h_n''=\psi(n+1)+\psi(n+m+1)-\psi(a+n+m)-\psi(b+n+m)$

而且当 $m=0$ 时 $\sum_{n=0}^{m-1}$ 应作为零.

(14) $F(a, b; a+b-m; z)/\Gamma(a+b-m)$

$$=\frac{\Gamma(m)(1-z)^{-m}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(a-m)_n(b-m)_n}{(1-m)_n n!}(1-z)^n$$

$$+\frac{(-1)^m}{\Gamma(a-m)\Gamma(b-m)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(n+m)!\,n!}[\bar{h}_n-\ln(1-z)](1-z)^n$$

$$-\pi<\arg(1-z)<\pi,\quad a, b\neq 0, -1, -2, \cdots$$

(15) $\bar{h}_n=\psi(1+n)+\psi(1+n+m)-\psi(a+n)+\psi(b+n).$

而且当 $m=0$ 时 $\sum_{n=0}^{m-1}$ 应作为零.

对于退化的情形(即 $a, b, c-a, c-b$ 中有一是整数)见 2-2-2 節.

2-11.　二次及高次变换

所有二次变换都可以从 2-9 節的綫性变换及特殊变换中導出（有效范圍見 2-1-5 節）.

(1)　$F(a, b; a-b+1; z)$

$$=(1-z)^{-a}F[\tfrac{1}{2}a, -b+(a+1)/2; 1+a-b; -4z(1-z)^{-1}]$$

(2)　$F(2a, 2b; a+b+\tfrac{1}{2}; z)=F[a, b; a+b+\tfrac{1}{2}; 4z(1-z)]$

(3)　$F(2a, 2b; a+b+\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}z)=\dfrac{\Gamma(a+b+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(b+\frac{1}{2})}F(a, b; \tfrac{1}{2}; z^2)$

$$-z\frac{\Gamma(a+b+\frac{1}{2})\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(a)\Gamma(b)}F(a+\tfrac{1}{2}, b+\tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}; z^2)$$

(4)　$F(a, b; 2b; z)=(1-\tfrac{1}{2}z)^{-a}F\{\tfrac{1}{2}a, \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}a; b+\tfrac{1}{2}; [z/(2-z)]^2\}$

(5)　$F[a, b; 2b; 4z(1+z)^{-2}]=(1+z)^{2a}F(a, a+\tfrac{1}{2}-b; b+\tfrac{1}{2}; z^2)$

(6)　$F(a, a+\tfrac{1}{2}; b; 2z-z^2)=(1-\tfrac{1}{2}z)^{-2a}F[2a, 2a-b+1; b; z/(2-z)]$

戈尔薩特二次变换表　平方根是这样定义的：如果 z 是实数且 $0\leqslant z<1$，则平方根值是正实数．所有公式在 $z=0$ 的鄰域内都成立．

(7)　$\dfrac{2\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a+b+\frac{1}{2})}{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(b+\frac{1}{2})}F(a, b; \tfrac{1}{2}; z)$

$$=F[2a, 2b; a+b+\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}(1+z^{\frac{1}{2}})]+F[2a, 2b; a+b+\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}(1-z^{\frac{1}{2}})]$$

(8)　$\dfrac{2\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a+1-b)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(1-b)}(1+z)^{a}F(a, b; \tfrac{1}{2}; -z)$

$$=F[2a, 1-2b; a+1-b; \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}(1+z)^{-\frac{1}{2}}]+F[2a, 1-2b; a+1-b; \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}(1+z)^{-\frac{1}{2}}]$$

(9)　$\dfrac{2\Gamma(-\frac{1}{2})\Gamma(a+b-\frac{1}{2})}{\Gamma(a-\frac{1}{2})\Gamma(b-\frac{1}{2})}z^{\frac{1}{2}}F(a, b; \tfrac{3}{2}; z)$

$$=F(2a-1, 2b-1; a+b-\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}z^{\frac{1}{2}})-F(2a-1, 2b-1; a+b-\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}z^{\frac{1}{2}})$$

(10)　$F(a, b; a+b+\tfrac{1}{2}; z)=F[2a, 2b; a+b+\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}(1-z)^{\frac{1}{2}}]$

(11) $F(a,\, b;\, a+b+\frac{1}{2};\, z)$

$$=[\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(1-z)^{\frac{1}{2}}]^{-2a}F\left[2a,\, a-b+\tfrac{1}{2};\, a+b+\tfrac{1}{2};\, \frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}-1}{(1-z)^{\frac{1}{2}}+1}\right]$$

(12) $F(a,\, b;\, a+b+\frac{1}{2};\, -z)$

$$=[(1+z)^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}]^{-2a}F[2a,\, a+b;\, 2a+2b;\, 2(z+z^2)^{\frac{1}{2}}-2z]$$

(13) $F(a,\, b;\, a+b-\frac{1}{2};\, z)$

$$=(1-z)^{-\frac{1}{2}}F[2a-1,\, 2b-1;\, a+b-\tfrac{1}{2};\, \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}(1-z)^{\frac{1}{2}}]$$

(14) $F(a,\, b;\, a+b-\frac{1}{2};\, z)=(1-z)^{-\frac{1}{2}}[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-z)^{\frac{1}{2}}]^{1-2a}$

$$\times F\left[2a-1,\, a-b+\tfrac{1}{2};\, a+b-\tfrac{1}{2};\, \frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}-1}{(1-z)^{\frac{1}{2}}+1}\right]$$

(15) $F(a,\, b;\, a+b-\frac{1}{2};\, -z)=(1+z)^{-\frac{1}{2}}[(1+z)^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}]^{1-2a}$

$$\times F[2a-1,\, a+b-1;\, 2a+2b-2;\, 2(z+z^2)^{\frac{1}{2}}-2z]$$

(16) $F(a,\, a+\frac{1}{2};\, c;\, z)$

$$=(1-z)^{-a}F[2a,\, 2c-2a-1;\, c;\, \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}(1-z)^{-\frac{1}{2}}]$$

(17) $F(a,\, a+\frac{1}{2};\, c;\, z)$

$$=(1+z^{\frac{1}{2}})^{-2a}F[2a,\, c-\tfrac{1}{2};\, 2c-1;\, 2z^{\frac{1}{2}}(1+z^{\frac{1}{2}})^{-1}]$$

(18) $F[a,\, b;\, (a+b+1)/2;\, z]$

$$=F[\tfrac{1}{2}a,\, \tfrac{1}{2}b;\, (a+b+1)/2;\, 4z(1-z)]$$

(19) $F[a,\, b;\, (a+b+1)/2;\, z]$

$$=(1-2z)F[\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}a;\, \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}b;\, (a+b+1)/2;\, 4z(1-z)]$$

(20) $F[a,\, b;\, (a+b+1)/2;\, z]=(1-2z)^{-a}$

$$\times F[\tfrac{1}{2}a,\, \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}a;\, (a+b+1)/2;\, 4z(z-1)(2z-1)^{-2}]$$

(21) $F[a,\, b;\, (a+b+1)/2;\, -z]=[(1+z)^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}]^{-2a}$

$$\times F\{a,\, \tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b;\, a+b;\, 4z^{\frac{1}{2}}(z+1)^{\frac{1}{2}}[(1+z)^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}]^{-2}\}$$

(22) $F(a,\, 1-a;\, c;\, z)$

$$=(1-z)^{c-1}F[\tfrac{1}{2}c-\tfrac{1}{2}a,\, (c+a-1)/2;\, c;\, 4z(1-z)]$$

(23) $$=(1-z)^{c-1}(1-2z)F[\tfrac{1}{2}c-\tfrac{1}{2}a,\, (c+1-a)/2;\, c;\, 4z(1-z)]$$

(24) $F(a,\, 1-a;\, c;\, z)=(1-z)^{c-1}(1-2z)^{a-c}$

$$\times F[\tfrac{1}{2}c-\tfrac{1}{2}a,\, (c+1-a)/2;\, c;\, 4z(z-1)(1-2z)^{-2}]$$

(25) $F(a,\, 1-a;\, c;\, -z)=(1+z)^{c-1}[(1+z)^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}]^{2-2a-2c}$

$$\times F\{c+a-1,\, c-\tfrac{1}{2};\, 2c-1;\, 4z^{\frac{1}{2}}(1+z)^{\frac{1}{2}}[(1+z)^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}]^{-2}\}$$

(26) $F(a, b; 2b; z)$

$$=(1-z)^{-\frac{1}{2}a}F[\tfrac{1}{2}a, b-\tfrac{1}{2}a; b+\tfrac{1}{2}a; (z^2/4)(z-1)^{-1}]$$

(27) $$=(1-\tfrac{1}{2}z)(1-z)^{-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}}F[b+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}a, \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}a; b+\tfrac{1}{2}; z^2/(4z-4)]$$

(28) $$=(1-\tfrac{1}{2}z)^{-a}F[\tfrac{1}{2}a, \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}a; b+\tfrac{1}{2}; z^2(2-z)^{-2}]$$

(29) $$=(1-z)^{b-a}(1-\tfrac{1}{2}z)^{a-2b}F[b-\tfrac{1}{2}a, b+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}a; b+\tfrac{1}{2}; z^2/(2-z)^{-2}]$$

(30) $$F(a, b; 2b; z)=(1-z)^{-\frac{1}{2}a}\times F\{a, 2b-a; b+\tfrac{1}{2}; (-\tfrac{1}{4})(1-z)^{-\frac{1}{2}}[1-(1-z)^{\frac{1}{2}}]^2\}$$

(31) $$F(a, b; 2b; z)=[\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(1-z)^{\frac{1}{2}}]^{-2a}\times F\left\{a, a-b+\tfrac{1}{2}; b+\tfrac{1}{2}; \left[\frac{1-(1-z)^{\frac{1}{2}}}{1+(1-z)^{\frac{1}{2}}}\right]^2\right\}$$

(32) $$F(a, b; a-b+1; z)=(1-z)^{-a}\times F[\tfrac{1}{2}a, (a+1-2b)/2; a-b+1; -4z(1-z)^{-2}]$$

(33) $$F(a, b; a-b+1; z)=(1+z)(1-z)^{-a-1}\times F[\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}a, \tfrac{1}{2}a+1-b; a-b+1; -4z(1-z)^{-2}]$$

(34) $$F(a, b; a-b+1; z)=(1+z)^{-a}\times F[\tfrac{1}{2}a, \tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}; a-b-1; 4z(1+z)^{-2}]$$

(35) $$F(a, b; a-b+1; z)=(1-z)^{1-2b}(1+z)^{2b-a-1}\times F[(a+1-2b)/2, (a-2b+2)/2; a+1-b; 4z(1+z)^{-2}]$$

(36) $$F(a, b; a-b+1; z)=(1+z^{\frac{1}{2}})^{-2a}\times F[a, a-b+\tfrac{1}{2}; 2a-2b+1; 4z^{\frac{1}{2}}(1+z^{\frac{1}{2}})^{-2}]$$

三次变换　应用 2-10 (1～6) 及 2-11 (1～6) 式，可把三次变换導成如下面的 (37), (38) 及 (39)

(37) $$2\pi(1-z^3)^a(-z)^{-3a}\left[\frac{F(a, a+\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; z^{-3})}{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(a+\frac{2}{3})}+\frac{e^{i\pi/3}}{z}\cdot\frac{F(a+\frac{1}{3}, a-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; z^{-3})}{\Gamma(\frac{4}{3})\Gamma(a)}\right]=2\pi(1-z^3)^a e^{-i\pi a}\times\left[\frac{F(a, a+\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; z^3)}{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(a+\frac{2}{3})}+ze^{-i\pi/3}\frac{F(a+\frac{1}{3}, a+\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; z^3)}{\Gamma(\frac{4}{3})\Gamma(a)}\right]$$

(38) $$= 3^{(3a+1)/2} e^{\pm i\pi a/2} \Gamma(a+\tfrac{1}{3}) (-w)^{-2a} (1-w)^{a}$$
$$\times [\Gamma(2a+\tfrac{2}{3})]^{-1} F(a+\tfrac{1}{3}, 3a; 2a+\tfrac{2}{3}; w^{-1})$$
$$w = \varepsilon(1-z)/(z-\varepsilon^2), \quad \varepsilon = e^{2i\pi/3}.$$

$\pm$ 符号依 $\operatorname{Im}(-w) \gtrless 0$ 而定.

又 $|\arg(-z)| < \pi/3$, $|\arg(1-z^3)| < \pi$, $|\arg(-w)| < \pi$, $|\arg(1-w)| < \pi$, $|w| > 1$, $\operatorname{Re} w > \frac{1}{2}$.

(39) $$F[3a/2, (3a-1)/2; a+\tfrac{1}{2}; -z^{2}]$$
$$= (1+z)^{1-3a} F[a-\tfrac{1}{3}, a; 2a; 2z(3+z^2)(1+z)^{-3}]$$

E. 戈尔薩特 (1881) 作出了三次变换的更完备的表. 我們只將这个表的有理部分列举于下:

(40) $$F(3a, 3a+\tfrac{1}{2}; 4a+\tfrac{2}{3}; z) = (1-9z/8)^{-2a}$$
$$\times F[a, a+\tfrac{1}{2}; a+\tfrac{5}{6}; -27z^2(1-z)(9z-8)^{-3}]$$

(41) $$F(3a, 3a+\tfrac{1}{2}; 2a+\tfrac{5}{6}; z) = (1-9z)^{-2a}$$
$$\times F[a, a+\tfrac{1}{2}; 2a+\tfrac{5}{6}; -27z(1-z)^2(1-9z)^{-3}]$$

(42) $$F(3a, a+\tfrac{1}{6}; 4a+\tfrac{2}{3}; z) = (1-z/4)^{-3a}$$
$$\times F[a, a+\tfrac{1}{3}, 2a+\tfrac{5}{6}; -27z^2(z-4)^{-3}]$$

(43) $$F(3a, \tfrac{1}{3}-a; 2a+\tfrac{5}{6}; z) = (1-4z)^{-3a}$$
$$\times F[a, a+\tfrac{1}{3}; 2a+\tfrac{5}{6}; 27z(4z-1)^{-3}]$$

(44) $$F(3a, \tfrac{1}{3}-a; \tfrac{1}{2}; z) = (1-z)^{-a}$$
$$\times F[a, \tfrac{1}{6}-a; \tfrac{1}{2}; (z/27)(9-8z)^2(1-z)^{-1}]$$

(45) $$F(3a, a+\tfrac{1}{6}; \tfrac{1}{2}; z) = (1-z)^{-2a}$$
$$\times F[a, \tfrac{1}{6}-a; \tfrac{1}{2}; -(z/27)(z-9)^2(1-z)^{-2}]$$

(46) $$F(3a+\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{6}-a; \tfrac{3}{2}; z) = (1-8z/9)(1-4z/3)^{-3a-3/2}$$
$$\times F[a+\tfrac{1}{2}, a+\tfrac{5}{6}; \tfrac{3}{2}; z(9-8z)^2(4z-3)^{-3}]$$

(47) $$F(3a+\tfrac{1}{2}, a+\tfrac{2}{3}; \tfrac{3}{2}; z) = (1-z/9)(1+z/3)^{-3a-3/2}$$
$$\times F[a+\tfrac{1}{2}, a+\tfrac{5}{6}; \tfrac{3}{2}; z(z-9)^2(z+3)^{-3}]$$

2-12. 積分式

(1) $$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt$$
$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0, \quad |\arg(1-z)| < \pi.$$

(2) $F(a,b;c;z)$

$$=\frac{i\Gamma(c)\exp[i\pi(b-c)]}{2\Gamma(b)\Gamma(c-b)\sin\pi(c-b)}\int_0^{(1+)}t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt$$

$\operatorname{Re} b>0,\ |\arg(1-z)|<\pi,\ c-b\neq 1, 2, 3, \cdots$

(3) $F(a,b;c;z)$

$$=\frac{-i\Gamma(c)\exp(-i\pi b)}{2\Gamma(b)\Gamma(c-b)\sin(\pi b)}\int_1^{(0+)}t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt$$

$\operatorname{Re} c>\operatorname{Re} b,\ |\arg(-z)|<\pi,\ b\neq 1, 2, 3, \cdots$

(4) $$F(a,b;c;z)=\frac{-\Gamma(c)\exp(-i\pi c)}{4\Gamma(b)\Gamma(c-b)\sin(\pi b)\sin\pi(c-b)}$$

$$\times\int^{(1+,0+,1-,0-)}t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt$$

$b,\ c-b\neq 1, 2, 3, \cdots$

(5) $$F(a,b;c;1-z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^{\infty}s^{b-1}(1+s)^{a-c}(1+sz)^{-a}ds$$

$\operatorname{Re} c>\operatorname{Re} b>0,\ |\arg z|<\pi.$

(6) $F(a,b;c;z^{-1})$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_1^{\infty}(s-1)^{c-b-1}s^{a-c}(s-z^{-1})^{-a}ds$$

$1+\operatorname{Re} a>\operatorname{Re} c>\operatorname{Re} b,\ |\arg(z-1)|<\pi.$

(7) $$F(a,b;c;z)=\frac{2\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^{\pi/2}\frac{(\sin t)^{2b-1}(\cos t)^{2c-2b-1}}{(1-z\sin^2 t)^a}dt$$

(8) $$F(a,b;c;z)=\frac{2^{1-c}\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^{\pi}\frac{(\sin t)^{2b-1}(1+\cos t)^{c-2b}}{(1-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}z\cos t)^a}dt$$

$$=\frac{2^{1-c}\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^{\pi}\frac{(\sin t)^{2c-2b-1}(1-\cos t)^{2b-c}}{(1-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}z\cos t)^a}dt$$

(9) $$F(a,b;c;z)=\frac{2\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^{\infty}\frac{(\operatorname{ch} v)^{2a-2c+1}(\operatorname{sh} v)^{2c-2b-1}}{[(\operatorname{ch} v)^2-z]^a}dv$$

(10) $F(a,b;c;z)$

$$=\frac{2^{b-a}\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^{\infty}\frac{(\operatorname{sh} t)^{2a-2c+1}(\operatorname{ch} t-1)^{2c-a-b-1}}{(\frac{1}{2}-z+\frac{1}{2}\operatorname{ch} t)^a}dt$$

(11) $F(a, b; c; z)$

$$=\frac{2^{b-c}\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^{\infty}\frac{(\operatorname{sh} t)^{2a-2b-1}(\operatorname{ch} t+1)^{a+b-2c+1}}{(\frac{1}{2}-z+\frac{1}{2}\operatorname{ch} t)^a}dt$$

(12) $F(a, b; c; z)$

$$=\frac{2\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^{\infty}\frac{(\operatorname{sh} v)^{2b-1}(\operatorname{ch} v)^{2a-2c+1}}{[(\operatorname{ch} v)^2-z(\operatorname{sh} v)^2]^a}dv$$

(13) $F(a, b; c; z)$

$$=\frac{2^{c-b}\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^{\infty}\frac{(\operatorname{sh} t)^{2b-1}(\operatorname{ch} t+1)^{a-c-b+1}}{[1+z+(1-z)\operatorname{ch} t]^a}dt$$

(14) $F(a, b; c; z)$

$$=\frac{2^{c-b}\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^{\infty}\frac{(\operatorname{sh} t)^{2a-2c+1}(\operatorname{ch} t-1)^{b+c-a-1}}{[(1+z)+(1-z)\operatorname{ch} t]^a}dt$$

(15) $F(a, b; c; z)$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^{\infty}e^{-bt}(1-e^{-t})^{c-b-1}(1-ze^{-t})^{-a}dt.$$

(7) 式至 (15) 式有效的条件是 $\operatorname{Re} c>\operatorname{Re} b>0$.

其余的積分見 2-1(15), 2-4(1) 至 2-4(10), 2-1(34), 2-1(35) 及 3-7 節,其中勒上特函数可用特殊超比函数來表示. 導出超比函数的積分还可参看第七章 (Sonine-Schafheitlin 及相关積分).

参 考 文 献

Bailey, W. N., 1935 a: *Generalized hypergeometric series*, Cambridge.

Bailey, W. N., 1935 b: *Proc. London Math. Soc.* (2) 38, 377-384.

Bancroft, T. A., 1949: *Ann. Math. Statistics.* 20, 451-455.

Barnes, E. W., 1907: *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 20, 253-279.

Barnes, E. W., 1908: *Proc. London Math. Soc.* (2) 6, 141-177.

Bateman, Harry, 1909: *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 21, 171-196. In particular. p. 184.

Bromwich, T. J., 1947: *An introduction to the theory of infinite series.* MacMillan and Co. Ltd. London.

Burchnall, J. L. and T. W. Chaundy, 1940: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 11, 249-270.

Burchnall, J. L. and T. W. Chaundy, 1948: *Proc. London Math. Soc.* (2) 50, 56–74.

Chaundy, T. W: 見 Burchaall, J. L.

Cherry, T. M., 1950 a: *Trans. Amer. Math. Soc.* 68, 224–257.

Cherry, T. M., 1950 b: *Proc. Roy. Soc. London Ser. A.*, 1202, 507–522.

Dixon, A. L., 1950: *Proc. London Math. Soc.* (2), 3, 206–224.

Elliot, E. B., 1904: *Messenger of Math.* 33, 31–40.

Erdélyi, Arthur, 1937 a: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 8, 200–213.

Erdélyi, Arthur, 1937 b: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 8, 267–277.

Erdélyi, Arthur, 1939: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 10, 176–189.

Erdélyi, Arthur, 1941: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A.* 61, 61–70

Fricke, Robert and Felix Klein, 1897–1912: *Vorlesungen Uber die Theorie der Automorphen Functionen.* 2 Vol., B. G. Teubner, Leipziz.

Gauss, C. F., 1876: Werke, Vol. III, Königliche Gesellschaft der Wissenshaften, Göttingen.

Goursat, Edouard, 1881: *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (2), 10, 3–142.

Goursat, Edouard, 1884: *Math. Ann.* 24, 445–460.

Goursat, Edouard, 1887: *J. Math. Pures Appl.* (4) 3, 255–305.

Goursat, Edouard, 1888: *Acta Soc. Sci. Fennicae*, 15, 47–127.

Goursat, Edouard, 1936: *Propriétés generales de L'équation d'Euler et de Gauses, (Actualités scientifiques et industriélles* 333), Paris.

Goursat, Edouard, 1938: *Intégrales Algebriques, Probleme d'inversion. (Act. sci. et industriélles,* 692) Paris.

Herglotz, G. A., 1917: *Ber. Sächs. Ges. Wissensch.* Leipzig 69, 510–534.

Heymann, Woldemar, 1899: *Z. Math. u Physik.* 44, 280–288.

Hurwitz, Adolf, 1890: *Nachr. Ges. Wiss. Goettingen,* 557–564.

Hurwitz, Adolf, 1891: *Math. Ann.* 38, 452–458.

Hurwitz, Adolf, 1906: *Nachr. Ges. Wiss. Goettingen,* 275–277.

Hurwitz, Adolf, 1907: *Math. Ann.* 64, 517–560.

Jocobi, C. G. J. 1859: *J. Reine Angew. Math.* 56, 144–165.

Kampé de Fériet, M. J., 1937: *La Fonction Hypergeométrique (Mémorial des sci. Math., Fascicule 85)* Gauthier-Villars.

Klein, Kelix and Fricke, Robert, 1890–1892: *Vorlesungen über die Theorie des elliptischen Modulfunctionen* 2 Vol., B. G. Teubner, Leipzig.

Klein, Felix, 1933: *Vorlesungen über die Hypergeometrische Function,* B. G. Teubner, Leipzig.

Lighthill, M. J. 1947: *Proc. Roy. Soc. London Ser. A.*, 191, 341-351.

MacRobert, T. M. 1923: *Proc. Edinburgh Math. Soc.* Vol 42, 84-88.

Mehlenbacher, L. E., 1938: *Amer. J. Math.* 60, 120-128.

Meixner, Joseph, 1941: *Deutsche Math.* 6, 341-349.

Mellin, H. J. 1895: *Über die fundamental Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma und der hypergeometrischen Functionen, Acta Soc. Sci. Fennicae*, 22, No. 12.

Mitra, C. G., 1943: *J. Indian Math. Soc.* (N. S.) 7, 102-109.

Orr, W. Ma. F., 1899: *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 17, 1-15.

Perron, Oskar, 1916-1917: *S. B. Heidelberger Akad. Wiss.* No. 9, 1916, No. 1, 1917.

Poole, E. G. C., 1936: *Introduction to the theory of linear differential equation.* Oxford.

Riemann, Bernhard, 1857 (and 1892): *Mathematische Werke* (1892), 66-83, B. G. Teubner, Leipzig.

Schwarz, H. A., 1873: *J. Reine Angew. Math.* 75, 292-335.

Seifert, Herbert, 1947: *Math. Ann.* 120, 75-126.

Snow, Chester, 1942: *The hypergeometric & Legendre functions with applications to integral equations of potential theory.* National Bureau of Standards.

Sommerfeld, Arnold, 1939: *Atombau und Spectrallinien, 2 nd Vol.*, 800-806. Frederich Vieweg and Sohn. Brunswick.

Truesdell, C. A. 1948: *An essay toward a unified theory of special functions based upon the functional equation* $\partial F(z, a)/\partial z = F(z, a+1)$, Princeton University Press. Princeton, N. J.

Van Vleck, E. B., 1902: *Trans. Amer. Math. Soc.* 3, 110-131.

Watson, G. N., 1909: *Quart. J. Math.* 41, 70-79.

Watson, G. N., 1918: *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 22, 277-308.

Whittaker, E. T., and Watson, G. N., 1927: *A course of modern analysis. 4th edition*, Cambridge.

Winston, M. 1895: *Math. Ann.* 46, 159.

Wirtinger, Wilhelm, 1902: *Akad. Wiss. Wien. S.-B.* II a, III, 894-900.

Wirtinger, Wilhelm, 1903: *Akad. Wiss. Wien. S.-B.* II a. 112, 1721-1733.

第三章 勒上特函数

3-1. 引言

式 $(a^2-2ar\cos\gamma+r^2)^{-\frac{1}{2}}$ 表示位于 A 点的源在 P 点上的势，其中 r 及 a 分别为 P 及 A 至 O 点的距离，γ 是 PA 張于 O 点的角．这一式依 r 的升冪展开时具有如下形式：

$$(1)\qquad (1/a)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\gamma)(r/a)^n \qquad\qquad 0<r<a.$$

此处系数 $P_n(\cos\gamma)$ 只依賴于 $\cos\gamma$（与 a 及 r 無关），而且可以証明是 $\cos\gamma$ 的 n 次多項式．它是1784年由勒上特所提出，因此称为**勒上特多項式**．

勒上特多項式及其相关的函数在以球極坐标 r,θ,ϕ 討論拉普拉斯方程 $\Delta V=0$，波动方程，或擴散方程等时常会遇到．球極坐标 r,θ,ϕ 定义为

$$x=r\sin\theta\cos\phi,\quad y=r\sin\theta\sin\phi,\quad z=r\cos\theta.$$

在这种坐标系中

$$\Delta V=r^{-2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+r^{-2}(\sin\theta)^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)$$
$$+(r\sin\theta)^{-2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2},$$

如果 $\Delta V=0$ 的一个解形如 $V=R(r)T(\theta)F(\phi)$，而 R、T，F 僅分别依賴于 r、θ，ϕ，則 T 必满足如下的常微分方程：

$$(2)\qquad \frac{d^2T}{d\theta^2}+\cos\theta\frac{dT}{d\theta}+[\nu(\nu+1)-(\mu\csc\theta)^2]T=0.$$

其中 μ 及 ν 为分离常数．作代換 $\zeta=\cos\theta$，可將式(2)簡化为 μ 階 ν 次勒上特方程：

$$(3)\qquad (1-\zeta^2)\frac{d^2T}{d\zeta^2}-2\zeta\frac{dT}{d\zeta}+[\nu(\nu+1)-\mu^2(1-\zeta^2)^{-1}]T=0.$$

在球体坐标及圓环坐标的势問題中也会遇到同样的微分方程；見

3-13 及 3-14 節．

在球極坐标中，$\zeta=\cos\theta$ 是实数，且界于 -1 及 1 之間；如果势是單值而連續的，并在 $r=$ 常数的球面上有連續偏導数，則可以証明 μ 及 ν 必为整数．但在 ζ 并不限制于区域 $(-1,1)$，μ,ν 并不限制于整数的其他情形下，也常可遇到式(3)这样的方程，因此我們將在不限制 ζ,μ,ν 为实数或虛数的情形下來研究式(3)的解．

在超比函数理論中也出現有勒上特方程．在这个理論中可知不論何时只要高斯的超比級数可作二次变换，則超比微分方程就可以簡化为(3)．

正交多項式理論給出了一个完全不同的情形．勒上特多項式 $P_n(\zeta)$ 是与区間 $(-1,1)$ 上等于 1 的权函数相連帶的正交多項式：因此它們出現于內插理論及仪器積分中．在区間 $-1\leqslant\zeta\leqslant 1$ 內具有权函数 $(1-\zeta^2)^a$ 的正交多項式也可用勒上特函数來表示(見第10章)．

在这一章里，我們將以微分方程(3)作为研究勒上特函数的基礎．

3-2. 勒上特微分方程的解

勒上特函数是下面勒上特微分方程的解：

$$(1)\qquad (1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2}-2z\frac{dw}{dz}+[\nu(\nu+1)-\mu^2(1-z^2)^{-1}]w=0.$$

z,ν,μ 不受任何限制．

作代換 $w=(z^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}v$，(1)式变成

$$(2)\qquad (1-z^2)\frac{d^2v}{dz^2}-2(\mu+1)z\frac{dv}{dz}+(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)v=0.$$

以 $\zeta=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z$ 作为自变量，上式变为

$$\zeta(1-\zeta)\frac{d^2v}{d\zeta^2}+(\mu+1)(1-2\zeta)\frac{dv}{d\zeta}+(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)v=0.$$

这就是 2-1(1)的高斯方程，其中 $a=\mu-\nu$, $b=\mu+\nu+1$, $c=\mu+1$.

因此，由 2-3(1) 可知函数

(3) $w=P_\nu^\mu(z)=\dfrac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}\mu}F(-\nu,\nu+1;1-\mu;\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}z)$

$|1-z|<2$

是(1)式的一个解。

如令 $\zeta=z^2$，(2)式变为

(4) $4\zeta(1-\zeta)\dfrac{d^2v}{d\zeta^2}+[2-(4\mu+\sigma)\zeta]\dfrac{dv}{d\zeta}-(\mu-\nu)(\mu+\nu+1)v=0.$

这又是超比型的方程，其中 $a=\frac{1}{2}(\mu+\nu+1)$，$b=\frac{1}{2}(\mu-\nu)$，$c=\frac{1}{2}$。因此由 2-9(9) 可知方程(1)有一个解为：

(5) $w=Q_\nu^\mu(z)=e^{\mu i\pi}2^{-\nu-1}\pi^{\frac{1}{2}}\dfrac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}z^{-\nu-\mu-1}(z^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}$

$\times F(\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\mu+1,\ \tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2};\ \nu+3/2;\ z^{-2})$

$|z|>1.$

函数 $P_\nu^\mu(z)$ 及 $Q_\nu^\mu(z)$ 分别称为第一类及第二类勒上特函数。它們在沿着实軸由 1 至 $-\infty$ 剖割的 z-平面内單值而正則。設

(6) $|\arg(z\pm1)|<\pi,\quad |\arg z|<\pi$

且 $(z^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}=(z-1)^{\frac{1}{2}\mu}(1+z)^{\frac{1}{2}\mu}.$

如果以 $-\mu$ 代 μ，$-z$ 代 z，$-\nu-1$ 代 ν，則勒上特微分方程不变。因此

$P_\nu^{\pm\mu}(\pm z),\quad Q_\nu^{\pm\mu}(\pm z),\quad P_{-\nu-1}^{\pm\mu}(\pm z),\quad Q_{-\nu-1}^{\pm\mu}(\pm z)$

都是方程(1)的解(并見 3-3-1 節)。

应用 2-1(23) 式于(3)式及(5)式，得

(7) $\Gamma(1-\mu)P_\nu^\mu(z)=2^\mu(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu}F(1-\mu+\nu,\ -\mu-\nu;$

$1-\mu;\ \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}z)$

(8) $\Gamma(\nu+3/2)Q_\nu^\mu(z)=e^{i\mu\pi}2^{-\nu-1}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\nu+\mu+1)z^{-1-\nu+\mu}$

$\times(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu}F(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}\mu,\ 1+\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}\mu;\nu+3/2;\ z^{-2}).$

(如果 ν 或 μ 或 ν 及 μ 是正整数，見 3-6 節)。

利用 2-10 節所述的超比函数变换公式，(3)及(5)式可以用几种方法表示为如下的形式：

(9) $P_\nu^\mu(z)=A_1F(a_1,b_1;c_1,\zeta)+A_2F(a_2,b_2;c_2;\zeta)\qquad|\zeta|<1,$

(10) $e^{-i\mu\pi}Q_\nu^\mu(z)=A_3F(a_3,b_3;c_3;\zeta)+A_4F(a_4,b_4;c_4;\zeta)$

$|\zeta|<1.$

$P_\nu^\mu(z)$ 的展开式

	A_1 / A_2
(14)	$(z+1)^{\frac{1}{2}\mu}(z-1)^{-\frac{1}{2}\mu}/\Gamma(1-\mu)$
	0
(15)	$\Gamma(-\mu)(z+1)^{\frac{1}{2}\mu}(z-1)^{-\frac{1}{2}\mu}/[\Gamma(1+\nu-\mu)\Gamma(-\nu-\mu)]$
	$-\pi^{-1}\sin(\nu\pi)\Gamma(\mu)(z-1)^{\frac{1}{2}\mu}(z+1)^{-\frac{1}{2}\mu}e^{\mp i\mu\pi}$
(16)	$2^{-\nu}(z+1)^{\frac{1}{2}\mu+\nu}(z-1)^{-\frac{1}{2}\mu}/\Gamma(1-\mu)$
	0
(17)	$-2^{\nu+1}\Gamma(-\mu)e^{\pm i\pi\nu}(z+1)^{\frac{1}{2}\mu}(z-1)^{-\frac{1}{2}\mu-\nu-1}\times[\Gamma(1+\nu-\mu)\Gamma(-\nu-\mu)]^{-1}$
	$\pi^{-1}2^{\nu+1}\sin(\nu\pi)\Gamma(\mu)e^{\pm i\pi(\nu-\mu)}(z-1)^{\frac{1}{2}\mu-\nu-1}(z+1)^{-\frac{1}{2}\mu}$
(18)	$2^{\nu+1}\Gamma(-1-2\nu)(z+1)^{\frac{1}{2}\mu-\nu-1}(z-1)^{-\frac{1}{2}\mu}/[\Gamma(-\nu)\Gamma(-\nu-\mu)]$
	$2^{-\nu}\Gamma(1+2\nu)(z+1)^{\frac{1}{2}\mu+\nu}(z-1)^{-\frac{1}{2}\mu}/[\Gamma(1+\nu)\Gamma(1+\nu-\mu)]$
(19)	$2^{-\nu}\Gamma(1+2\nu)(z+1)^{\frac{1}{2}\mu}(z-1)^{-\frac{1}{2}\mu+\nu}/[\Gamma(1+\nu)\Gamma(1+\nu-\mu)]$
	$2^{\nu+1}\Gamma(-1-2\nu)(z+1)^{\frac{1}{2}\mu}(z-1)^{-\frac{1}{2}\mu-\nu-1}/[\Gamma(-\nu)\Gamma(-\nu-\mu)]$
(20)	$2^{\mu}(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu}/\Gamma(1-\mu)$
	0
(21)	$2^{-\nu-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(-\frac{1}{2}-\nu)(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}/\Gamma(-\nu-\mu)$
	$2^{\nu}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)(z^2-1)^{\frac{1}{2}\nu}/\Gamma(1+\nu-\mu)$

$P_\nu^\mu(z)$ 的展开式

	ζ	a_1 / a_2	b_1 / b_2	c_1 / c_2	备注
(14)	$\frac{1-z}{2}$	$-\nu$	$1+\nu$	$1-\mu$	
		…	…	…	
(15)	$\frac{1+z}{2}$	$-\nu$	$1+\nu$	$1+\mu$	(14), 2-10(1)
		$-\nu$	$1+\nu$	$1-\mu$	用上部或下部符号随 $\operatorname{Im} z \gtrless 0$ 而定
(16)	$\frac{z-1}{z+1}$	$-\nu$	$-\nu+\mu$	$1-\mu$	(14), 2-10(6)
		…	…	…	
(17)	$\frac{z+1}{z-1}$	$1+\nu$	$1+\nu+\mu$	$1+\mu$	(15), 2-10(6)
		$1+\nu$	$1+\nu-\mu$	$1-\mu$	用上部或下部符号随 $\operatorname{Im} z \gtrless 0$ 而定
(18)	$\frac{2}{1+z}$	$1+\nu$	$1+\nu-\mu$	$2+2\nu$	(16), 2-10(1)
		$-\nu$	$-\nu-\mu$	-2ν	
(19)	$\frac{2}{1-z}$	$-\nu$	$-\nu+\mu$	-2ν	(14), 2-10(2)
		$1+\nu$	$1+\nu-\mu$	$2+2\nu$	
(20)	$1-z^2$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$1-\mu$	(15), 2-11(2)
		…	…	…	$\operatorname{Re} z>0$
(21)	$\frac{1}{1-z^2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu$	$\nu+3/2$	(20), 2-10(2)
		$-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu$	$-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$\frac{1}{2}-\nu$	

$P_\nu^\mu(z)$ 的展开式

	A_1 / A_2
(22)	$2^\mu \pi^{\frac{1}{2}}(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu}/[\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)\Gamma(1+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)]$
	$-\pi^{\frac{1}{2}}2^{\mu+1}z(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu}/[\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)\Gamma(-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)]$
(23)	$2^{-\nu-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(-\frac{1}{2}-\nu)z^{-\nu+\mu-1}(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu}/\Gamma(-\nu-\mu)$
	$2^\nu\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)z^{\nu+\mu}(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu}/\Gamma(1+\nu-\mu)$
(24)	$2^\mu(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu}z^{\nu+\mu}/\Gamma(1-\mu)$
	0
(25)	$\pi^{\frac{1}{2}}2^\mu e^{\mp i\pi\frac{1}{2}(\mu+\nu)}(z^2-1)^{\frac{1}{2}\nu}/[\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)\Gamma(1+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)]$
	$-\pi^{\frac{1}{2}}2^{\mu+1}e^{\mp i\pi\frac{1}{2}(\mu+\nu-1)}z(z^2-1)^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}[\Gamma(-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)$ $\times\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)]^{-1}$
(26)	$(2\pi)^{-\frac{1}{2}}(z^2-1)^{-\frac{1}{4}}\Gamma(-\frac{1}{2}-\nu)[z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{\nu+\frac{1}{2}}/\Gamma(-\nu-\mu)$
	$(2\pi)^{-\frac{1}{2}}(z^2-1)^{-\frac{1}{4}}\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)[z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu-\frac{1}{2}}/\Gamma(1+\nu-\mu)$
(27)	$\pi^{-\frac{1}{2}}2^\mu\Gamma(-\frac{1}{2}-\nu)(z^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu-\mu-1}/\Gamma(-\nu-\mu)$
	$\pi^{-\frac{1}{2}}2^\mu\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)(z^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{\nu-\mu}/\Gamma(1+\nu-\mu)$
(28)	$2^\mu(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu}[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{\nu+\mu}/\Gamma(1-\mu)$
	0
(29)	$2^\mu(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu}[z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{\nu+\mu}/\Gamma((1-\mu)$
	0

$P_\nu^\mu(z)$ 的展开式

	ζ	a_1 / a_2	b_1 / b_2	c_1 / c_2	备注
(22)	z^2	$-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$\frac{1}{2}$	(20), 2-10(1)
		$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$1+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$3/2$	
(23)	$\frac{1}{z^2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$1+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$\nu+3/2$	(21), 2-10(6)
		$-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$\frac{1}{2}-\nu$	
(24)	$1-\frac{1}{z^2}$	$-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$1-\mu$	(20), 2-10(6)
		…	…	…	Re $z>0$
(25)	$\frac{z^2}{z^2-1}$	$-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu$	$\frac{1}{2}$	(24), 2-10(2)
		$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu$	$3/2$	上面或下面的符号依 Im $z\gtrless0$ 而取
(26)	$\frac{-z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{2(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{1}{2}+\mu$	$\frac{1}{2}-\mu$	$3/2+\nu$	(23), 2-11(16)
		$\frac{1}{2}+\mu$	$\frac{1}{2}-\mu$	$\frac{1}{2}-\nu$	
(27)	$\frac{z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{1}{2}+\mu$	$1+\nu+\mu$	$\nu+3/2$	(26), 2-10(6)
		$\frac{1}{2}+\mu$	$-\nu+\mu$	$\frac{1}{2}-\nu$	
(28)	$\frac{2(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$	$-\nu-\mu$	$\frac{1}{2}-\mu$	$1-2\mu$	(24), 2-11(17)
		…	…	…	Re $z>0$
(29)	$\frac{2(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{-z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$	$-\nu-\mu$	$\frac{1}{2}-\mu$	$1-2\mu$	(28), 2-10(6)
		…	…	…	

$P_\nu^\mu(z)$ 的展开式

	A_1 A_2
(30)	$(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)e^{\mp i\pi(\mu-\frac{1}{2})}(z^2-1)^{-\frac{1}{4}}[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu-\frac{1}{2}}\times[\Gamma(\nu-\mu+1)]^{-1}$ $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\Gamma(-\frac{1}{2}-\nu)e^{\mp i\pi(\mu-\frac{1}{2})}(z^2-1)^{-\frac{1}{4}}[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{\nu+\frac{1}{2}}\times[\Gamma(-\nu-\mu)]^{-1}$
(31)	$\pi^{-\frac{1}{2}}2^{-\mu}\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu}[z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{\nu+\mu}/\Gamma(\nu-\mu+1)$ $\pi^{-\frac{1}{2}}2^{-\mu}\Gamma(-\frac{1}{2}-\nu)(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu}[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{\nu+\mu+1}/\Gamma(-\nu-\mu)$

$e^{-i\mu\pi}Q_\nu^\mu(z)$ 的展开式

	A_3 A_4
(32)	$\Gamma(1+\nu+\mu)\Gamma(-\mu)(z-1)^{\frac{1}{2}\mu}(z+1)^{-\frac{1}{2}\mu}/[2\Gamma(1+\nu-\mu)]$ $\frac{1}{2}\Gamma(\mu)(z+1)^{\frac{1}{2}\mu}(z-1)^{-\frac{1}{2}\mu}$
(33)	$-e^{\mp i\pi\nu}\Gamma(1+\nu+\mu)\Gamma(-\mu)(z+1)^{\frac{1}{2}\mu}(z-1)^{-\frac{1}{2}\mu}/[2\Gamma(1+\nu-\mu)]$ $-\frac{1}{2}e^{\mp i\pi\nu}\Gamma(\mu)(z-1)^{\frac{1}{2}\mu}(z+1)^{-\frac{1}{2}\mu}$
(34)	$2^{-1-\nu}\Gamma(\mu)(z+1)^{\nu+\frac{1}{2}\mu}(z-1)^{-\frac{1}{2}\mu}$ $2^{-1-\nu}\Gamma(1+\nu+\mu)\Gamma(-\mu)(z+1)^{-\frac{1}{2}\mu+\nu}(z-1)^{\frac{1}{2}\mu}/\Gamma(1+\nu-\mu)$
(35)	$2^{\nu}\Gamma(-\mu)\Gamma(1+\nu+\mu)(z-1)^{-\frac{1}{2}\mu-\nu-1}(z+1)^{\frac{1}{2}\mu}/\Gamma(1+\nu-\mu)$ $2^{\nu}\Gamma(\mu)(z+1)^{-\frac{1}{2}\mu}(z-1)^{\frac{1}{2}\mu-\nu-1}$
(36)	$2^{\nu}\Gamma(1+\nu)\Gamma(1+\nu+\mu)(z+1)^{\frac{1}{2}\mu-\nu-1}(z-1)^{-\frac{1}{2}\mu}/\Gamma(2+2\nu)$ 0

$P^{\mu}_{\nu}(z)$ 的展开式

	ζ	a_1 / a_2	b_1 / b_2	c_1 / c_2	备注
(30)	$\dfrac{z\pm(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{2(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{1}{2}-\mu$	$\frac{1}{2}+\mu$	$\frac{1}{2}-\nu$	(28), 2-10(2)
		$\frac{1}{2}-\mu$	$\frac{1}{2}+\mu$	$\nu+3/2$	上面或下面的符号视 $\mathrm{Im}\, z \gtrless 0$ 而定
(31)	$\dfrac{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$	$-\nu-\mu$	$\frac{1}{2}-\mu$	$\frac{1}{2}-\nu$	(29), 2-10(1)
		$1+\nu-\mu$	$\frac{1}{2}-\mu$	$\nu+3/2$	超比级数在切割平面上没有一处收敛

$e^{-i\mu\pi}Q^{\mu}_{\nu}(z)$ 的展开式

	ζ	a_3 / a_4	b_3 / b_4	c_3 / c_4	备注
(32)	$\dfrac{1-z}{2}$	$-\nu$	$1+\nu$	$1+\mu$	(37), 2-10(2)
		$-\nu$	$1+\nu$	$1-\mu$	
(33)	$\dfrac{1+z}{2}$	$-\nu$	$1+\nu$	$1+\mu$	(36), 2-10(2)
		$-\nu$	$1+\nu$	$1-\mu$	上面或下面符号视 $\mathrm{Im}\, z \gtrless 0$ 而定
(34)	$\dfrac{z-1}{z+1}$	$-\nu$	$-\nu-\mu$	$1-\mu$	(36), 2-10(1)
		$-\nu$	$-\nu+\mu$	$1+\mu$	
(35)	$\dfrac{z+1}{z-1}$	$1+\nu$	$1+\nu+\mu$	$1+\mu$	(36), 2-10(3)
		$1+\nu$	$1+\nu-\mu$	$1-\mu$	
(36)	$\dfrac{2}{1+z}$	$1+\nu-\mu$	$1+\nu$	$2+2\nu$	(41), 2-11(17)
		…	…	…	

$e^{-i\mu\pi}Q_\nu^\mu(z)$ 的展开式

	A_3	A_4
(37)	$2^\nu\Gamma(1+\nu)\Gamma(1+\nu+\mu)(z+1)^{\frac{1}{2}\mu}(z-1)^{-\frac{1}{2}\mu-\nu-1}/\Gamma(2+2\nu)$	0
(38)	$2^{-1+\mu}\Gamma(\mu)(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu}$	$2^{-1-\mu}\Gamma(1+\nu+\mu)\Gamma(-\mu)(z^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}/\Gamma(1+\nu-\mu)$
(39)	$2^{-1-\nu}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(1+\nu+\mu)(z^2-1)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}/\Gamma(\nu+3/2)$	0
(40)	$\pi^{\frac{1}{2}}2^{\mu-1}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu)e^{\pm i\pi\frac{1}{2}(\mu-\nu-1)}(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu}\times[\Gamma(1+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)]^{-1}$	$\pi^{\frac{1}{2}}2^\mu\Gamma(1+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu)e^{\pm i\pi\frac{1}{2}(\mu-\nu)}z(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu}[\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)]^{-1}$
(41)	$2^{-1-\nu}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(1+\nu+\mu)z^{-1-\nu-\mu}(z^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}/\Gamma(\nu+3/2)$	0
(42)	$2^{\mu-1}\Gamma(\mu)z^{\nu+\mu}(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu}$	$2^{-1-\mu}\Gamma(1+\nu+\mu)\Gamma(-\mu)z^{\nu-\mu}(z^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}/\Gamma(1+\nu-\mu)$
(43)	$\pi^{\frac{1}{2}}2^{\mu-1}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu)e^{\mp i\pi(\nu+\frac{1}{2})}(z^2-1)^{\frac{1}{2}\nu}/\Gamma(1+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)$	$\pi^{\frac{1}{2}}2\mu\Gamma(1+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu)e^{\mp i\pi(\nu-\frac{1}{2})}z(z^2-1)^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}/\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)$
(44)	$(\frac{1}{2}\pi)^{\frac{1}{2}}\Gamma(1+\nu+\mu)(z^2-1)^{-\frac{1}{2}}[z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{\nu+\frac{1}{2}}/\Gamma(\nu+3/2)$	0

$e^{-i\mu\pi}Q_\nu^\mu(z)$ 的展开式

	ζ	a_3 / a_4	b_3 / b_4	c_3 / c_4	备注
(37)	$\frac{2}{1-z}$	$1+\nu+\mu$	$1+\nu$	$2+2\nu$	(36), 2-10(6)
		…	…	…	
(38)	$1-z^2$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$1-\mu$	(39), 2-10(2)
		$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu$	$-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu$	$1+\mu$	Re $z>0$
(39)	$\frac{1}{1-z^2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$\nu+3/2$	(41), 2-10(6)
		…	…	…	
(40)	z^2	$-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$1/2$	(41), 2-10(2)
		$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$1+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$3/2$	上面或下面的符号视 Im $z\gtrless0$ 而定
(41)	$\frac{1}{z^2}$	$1+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu$	$\nu+3/2$	
		…	…	…	
(42)	$1-\frac{1}{z^2}$	$-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$1-\mu$	(38), 2-10(6)
		$-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu$	$1+\mu$	
(43)	$\frac{z^2}{z^2-1}$	$-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu$	$1/2$	(41), 2-10(3)
		$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu$	$3/2$	上面或下面的符号视 Im $z\gtrless0$ 而定
(44)	$\frac{-z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{2(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{1}{2}+\mu$	$\frac{1}{2}-\mu$	$\nu+3/2$	(41), 2-11(16)
		…	…	…	

$e^{-i\mu\pi}Q_\nu^\mu(z)$ 的展开式

	A_3	A_4
(45)	$\pi^{\frac{1}{2}}2^\mu\Gamma(1+\nu+\mu)(z^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{-1-\nu-\mu}/\Gamma(\nu+3/2)$	0
(46)	$2^{\mu-1}\Gamma(\mu)(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu}[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{\nu+\mu}$	$2^{-1-\mu}\Gamma(1+\nu+\mu)\Gamma(-\mu)(z^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{\nu-\mu}/\Gamma(1+\nu-\mu)$
(47)	$2^{-1+\mu}\Gamma(\mu)(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu}[z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{\nu+\mu}$	$2^{-1-\mu}\Gamma(1+\nu+\mu)\Gamma(-\mu)(z^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}[z-(z^2-1)]^{\nu-\mu}/\Gamma(1+\nu-\mu)$
(48)	$(\frac{1}{2}\pi)^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)(z^2-1)^{-\frac{1}{4}}[z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}+\nu}/\Gamma(1+\nu-\mu)$	$\pi^{-\frac{1}{2}}2^{-1-\nu}\Gamma(1+\nu+\mu)\Gamma(-\frac{1}{2}-\nu)\cos(\mu\pi)(z^2-1)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu}$
(49)	$2^\mu\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)e^{\mp i\pi(\frac{1}{2}+\mu)}(z^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{\mu-\nu}$ $\times[\Gamma(1+\nu-\mu)]^{-1}$	$-2^{-\mu}\pi^{-\frac{1}{2}}\cos(\mu\pi)\Gamma(1+\nu+\mu)\Gamma(-\frac{1}{2}-\nu)e^{\mp i\pi(\nu-\mu)}(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\mu}$ $\times[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{1+\nu-\mu}$

其中 ζ 是 z 的函数，与选择的变换有关．(9)及(10)式的各种表示式如上表的(14)至(49)．每一表的最后一格指出方程中的展开式導出的方法．例如：以变换式 2-10(1) 应用于(14)式卽得(15)式．表内共有 36 个不同的超比級数，每一級数是方程(1)的一个解．如果將变换式 2-1(23) 运用于每一个这样的級数上，就可得 36 个另外的超比級数．这就構成了微分方程(1)的沃尔勃立契特 72 个解(見 Olbricht, 1888, p. 1)．在所有这些公式中

(11)　$(z^2-1)^\alpha=(z-1)^\alpha(z+1)^\alpha,\quad |\arg(z\pm1)|<\pi,\ |\arg z|<\pi,$

$e^{-i\mu\pi}Q_\nu^\mu(z)$ 的展开式

	ζ	$\frac{a_3}{a_4}$	$\frac{b_3}{b_4}$	$\frac{c_3}{c_4}$	备注
(45)	$\frac{z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{\mu+\frac{1}{2}}{\cdots}$	$\frac{1+\nu+\mu}{\cdots}$	$\frac{\nu+3/2}{\cdots}$	(44), 2-10(6)
(46)	$\frac{2(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{-\nu-\mu}{-\nu+\mu}$	$\frac{\frac{1}{2}-\mu}{\frac{1}{2}+\mu}$	$\frac{1-2\mu}{1+2\mu}$	(44), 2-10(3) Re $z>0$
(47)	$\frac{2(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{-z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{-\nu-\mu}{-\nu+\mu}$	$\frac{\frac{1}{2}-\mu}{\frac{1}{2}+\mu}$	$\frac{1-2\mu}{1+2\mu}$	(44), 2-10(2)
(48)	$\frac{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{2(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{\frac{1}{2}+\mu}{1+\nu-\mu}$	$\frac{\frac{1}{2}-\mu}{1+\nu+\mu}$	$\frac{\frac{1}{2}-\nu}{\nu+3/2}$	(44), 2-10(1)
(49)	$\frac{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{\frac{1}{2}+\mu}{\frac{1}{2}-\mu}$	$\frac{\mu-\nu}{1+\nu-\mu}$	$\frac{\frac{1}{2}-\nu}{\nu+3/2}$	(48), 2-10(6) 上部或下部的符号视 Im $z\gtrless0$ 而定 超比级数在切割平面上没有一处收敛

因而

$$(12)\qquad -z-1=e^{\mp i\pi}(z+1),\quad -z+1=e^{\mp i\pi}(z-1),$$
$$1-z^2=e^{\mp i\pi}(z^2-1).$$

其中上面的或下面的符号的选用视 Im $z\gtrless0$ 而定。

由(1)可知,隆司克式

$$W\{P_\nu^\mu(z),\ Q_\nu^\mu(z)\}=P_\nu^\mu(z)\frac{d}{dz}Q_\nu^\mu(z)-Q_\nu^\mu(z)\frac{d}{dz}P_\nu^\mu(z)$$

应具有 $c/(1-z^2)$ 的形式,此处常数 c 在令 $z=0$ 后就可算出。应

用(22)及(40)，可得

$$(13)\quad W\{P_\nu^\mu(z),\ Q_\nu^\mu(z)\}=\frac{e^{i\mu\pi}2^{2\mu}\Gamma(1+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu)\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu)}{(1-z^2)\Gamma(1+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)}.$$

上面是方程(9)(10)形式的展开式的表.

3-3-1. 勒上特函数之間的关系

由 3-2(3) 得

$$(1)\quad P_\nu^\mu(z)=P_{-\nu-1}^\mu(z)$$

由 3-2(5) 及 3-2(8) 有

$$(2)\quad e^{i\mu\pi}\Gamma(\nu+\mu+1)Q_\nu^{-\mu}(z)=e^{-i\pi\mu}\Gamma(\nu-\mu+1)Q_\nu^\mu(z)$$

由 3-2(5) 及 3-2(23)，得

$$(3)\quad Q_\nu^\mu(z)\sin[\pi(\nu+\mu)]-Q_{-\nu-1}^\mu(z)\sin[\pi(\nu-\mu)]=\pi e^{i\mu\pi}\cos(\nu\pi)P_\nu^\mu(z).$$

由 3-2(32) 及 3-2(3)，得

$$(4)\quad Q_\nu^\mu(z)\sin(\mu\pi)=\tfrac{1}{2}\pi e^{\mu\pi i}\left[P_\nu^\mu(z)-\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}P_\nu^{-\mu}(z)\right],$$

因而

$$(5)\quad P_\nu^{-\mu}(z)=\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}[P_\nu^\mu(z)-(2/\pi)e^{-i\mu\pi}\sin(\mu\pi)Q_\nu^\mu(z)],$$

$$(6)\quad P_\nu^\mu(z)=\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}P_\nu^{-\mu}(z)+(2/\pi)e^{-i\mu\pi}\sin(\mu\pi)Q_\nu^\mu(z),$$

故，如 $\mu=m(m=1,2,3,\cdots)$

$$(7)\quad P_\nu^m(z)=\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu-m+1)}P_\nu^{-m}(z).$$

由(5)及(3)

$$(8)\quad P_\nu^{-\mu}(z)=\frac{e^{-i\mu\pi}\Gamma(\nu-\mu+1)}{\pi\cos(\nu\pi)\Gamma(\nu+\mu+1)}\sin[\pi(\nu-\mu)][Q_\nu^\mu(z)-Q_{-\nu-1}^\mu(z)].$$

或者根据 1-2(6)

$$(9)\quad Q_{-\nu-1}^\mu(z)-Q_\nu^\mu(z)=e^{i\mu\pi}\cos(\nu\pi)\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)\times P_\nu^{-\mu}(z).$$

由 3-2(15), 3-2(3) 及 3-2(32)

(10)　$P_\nu^\mu(-z)=e^{\mp\nu\pi i}P_\nu^\mu(z)-(2/\pi)e^{-i\mu\pi}\sin[\pi(\nu+\mu)]Q_\nu^\mu(z)$

或

(11)　$P_\nu^\mu(z)e^{-\pi\mu i}\sin[\pi(\nu+\mu)]=\frac{1}{2}\pi[e^{\mp i\nu\pi}P_\nu^\mu(z)-P_\nu^\mu(-z)].$

因此,以 $-z$ 代 z.

(12)　$Q_\nu^\mu(-z)=-e^{\pm i\nu\pi}Q_\nu^\mu(z).$

在(10), (11), (12)中上面或下面的符号依 $\operatorname{Im} z\gtrless 0$ 而取。

如果在 3-2(3) 中以 $z(z^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ 代 z, $-\mu-\frac{1}{2}$ 代 ν, $-\nu-\frac{1}{2}$ 代 μ, 將結果与 3-2(44) 比較,就可得揮普耳公式

(13)　$Q_\nu^\mu(z)=e^{i\mu\pi}(\frac{1}{2}\pi)^{\frac{1}{2}}\Gamma(\nu+\mu+1)(z^2-1)^{-\frac{1}{4}}P_{-\mu-\frac{1}{2}}^{-\nu-\frac{1}{2}}[z(z^2-1)^{-\frac{1}{2}}],$

$$\operatorname{Re} z>0.$$

上式等价于

(14)　$\Gamma(-\nu-\mu)P_\nu^\mu(z)=i\,e^{i\nu\pi}(\frac{1}{2}\pi)^{-\frac{1}{2}}(z^2-1)^{-\frac{1}{4}}Q_{-\mu-\frac{1}{2}}^{-\nu-\frac{1}{2}}[z(z^2-1)^{-\frac{1}{2}}].$

$$\operatorname{Re} z>0.$$

当 z 从实軸上 $z>1$ 的一点变向虚軸上的一点时, $z(z^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ 就从实軸上的一点变到 0 与 1 之間的剖割上的一点. 由于第二类勒上特函数在剖割上是不連續的,故我們必須作限制 $\operatorname{Re} z>0$.

3-3-2. 与超比級数的其他一些关系

由 3-2(3) 及 (11) 得

(15)
$$Q_\nu^\mu(z)e^{-i\mu\pi}\sin[\pi(\nu+\mu)]\Gamma(1-\mu)$$
$$=\frac{1}{2}\pi\left[e^{\mp i\nu\pi}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}\mu}F(-\nu,\nu+1;1-\mu;\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}z)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}\mu}F(-\nu,\nu+1;1-\mu;\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}z)\right],$$

因而由(2)得

(16)
$$2Q_\nu^\mu(z)e^{-i\mu\pi}\Gamma(1+\mu)=\Gamma(1+\nu+\mu)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}\mu}\Gamma(\mu-\nu)$$
$$\times[F(-\nu,\nu+1;1+\mu;\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}z)$$
$$-e^{\mp i\nu\pi}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\mu}F(-\nu,\nu+1;1+\mu;\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}z)]$$

用上面的或下面的符号视 Im $z \gtrless 0$ 而定.

由(6), 3-2(3)及(16), 得

(17) $$\pi\Gamma(1+\mu)P_\nu^\mu(z)=\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}\mu}\sin(\mu\pi)$$
$$\times\Bigg[F(-\nu,\nu+1;1+\mu;\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}z)$$
$$-\frac{\sin(\nu\pi)}{\sin(\mu\pi)}e^{\mp i\mu\pi}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\mu}F(-\nu;\nu+1;1+\mu;\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}z)\Bigg].$$

上面或下面的符号依 Im $z \gtrless 0$ 而选定. 表达式(15)至(17)不是 3-2(9)及 3-2(10)型的式子, 因为这些式子中的二个超比函数具有不同的变数.

如果 3-2(44)中的 z 在负方向内包围点 $+1$, 则可得出函数的一个新枝, 可以 $Q_\nu^\mu(z,1-)$ 表示. 根据 3-2(11)式可得

(18) $$(\tfrac{1}{2}\pi)^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\nu+3/2)e^{-i\mu\pi}Q_\nu^\mu(z,1-)$$
$$=i\Gamma(\nu+\mu+1)(z^2-1)^{-\frac{1}{4}}[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{\nu+\frac{1}{2}}$$
$$\times F\left[\tfrac{1}{2}+\mu,\tfrac{1}{2}-\mu;\nu+3/2;\frac{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{2(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

当 z 在实轴上 1 的右侧或 -1 的左侧时, 超比函数的自变量是实数且 >1.

由 3-2(32), 对同样的函数有

(19) $$e^{-i\pi\mu}Q_\nu^\mu(z,1-)=\frac{\Gamma(1+\nu+\mu)\Gamma(-\mu)e^{-i\pi\mu}}{2\Gamma(1+\nu-\mu)}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}\mu}$$
$$\times F[-\nu,1+\nu;1+\mu;\tfrac{1}{2}(1-z)]$$
$$+\tfrac{1}{2}\Gamma(\mu)e^{i\mu\pi}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}\mu}F[-\nu,1+\nu;1-\mu;\tfrac{1}{2}(1-z)].$$

由(19), 3-2(32)及 3-2(3)可得

(20) $$Q_\nu^\mu(z,1-)-e^{-i\mu\pi}Q_\nu^\mu(z)=\pi ie^{i\mu\pi}P_\nu^\mu(z).$$

因此, 由(18)及 3-2(44)可得

(21) $$(2\pi)^{\frac{1}{2}}(z^2-1)^{\frac{1}{4}}\frac{\Gamma(\nu+3/2)}{\Gamma(1+\nu+\mu)}P_\nu^\mu(z)$$
$$=[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{\nu+\frac{1}{2}}F\left[\tfrac{1}{2}+\mu,\tfrac{1}{2}-\mu;\tfrac{3}{2}+\nu;\frac{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{2(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$+ie^{-i\mu\pi}[z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{\nu+\frac{1}{2}}F\left[\tfrac{1}{2}+\mu,\tfrac{1}{2}-\mu;\tfrac{3}{2}+\nu;\right.$$
$$\left.\frac{-z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{2(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

此外，由(9)，(20)及 3-2(44)有

$$(22)\quad Q_\nu^\mu(z)\sin[\pi(\nu+\mu)]\Gamma(\tfrac{1}{2}-\mu)$$
$$=(\tfrac{1}{2}\pi)^{\frac{1}{2}}\Gamma(\mu-\nu)(z^2-1)^{-\frac{1}{4}}e^{i\mu\pi}\Big\{\cos(\nu\pi)[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu-\frac{1}{2}}$$
$$\times F\left[\tfrac{1}{2}+\mu,\tfrac{1}{2}-\mu;\tfrac{1}{2}-\nu;\frac{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{2(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right]+i\cos(\mu\pi)e^{-i\nu\pi}$$
$$\times[z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu-\frac{1}{2}}F\left[\tfrac{1}{2}+\mu,\tfrac{1}{2}-\mu;\tfrac{1}{2}-\nu;\right.$$
$$\left.\frac{-z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{2(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right]\Big\}.$$

表达式(21)及(22)是和 3-2(9) 及 3-2(10) 不同型的.

3-4. 在剖割上的勒上特函数

在勒上特函数的很多应用中 $z=x$，此处 $-1<x<1$. 区間 $(-1,1)$ 在本節中叫做“剖割”，在整个本節中我們都有 $-1<x<1$. 如 μ 是偶整数，则由 3-2(3) 可知，$P_\nu^\mu(z)$ 的值在剖割两边是相等的，因此在这种情况下我們尽可以沿着实軸由 -1 至 $-\infty$ 來作分枝切割. 在所有其他情况下，$P_\nu^\mu(x-i0)$ 及 $P_\nu^\mu(x+i0)$ 是不相同的 $[f(x\pm i0)$ 表示 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}f(x\pm i\varepsilon)$, $\varepsilon>0]$. 为了避免混淆，通常采用 3-2(1) 的稍經变化的解. 我們以 $\mathrm{P}_\nu^\mu(x)$, $\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)$ 代表.

$$(1)\quad \mathrm{P}_\nu^\mu(x)=\tfrac{1}{2}[e^{i\frac{1}{2}\mu\pi}P_\nu^\mu(x+i0)+e^{-i\frac{1}{2}\mu\pi}P_\nu^\mu(x-i0)],$$

$$(2)\quad \mathrm{Q}_\nu^\mu(x)=\tfrac{1}{2}e^{-i\mu\pi}[e^{-i\frac{1}{2}\mu\pi}Q_\nu^\mu(x+i0)+e^{i\frac{1}{2}\mu\pi}Q_\nu^\mu(x-i0)]$$
$$-1<x<1.$$

根据这些定义，对应于 P_ν^μ 及 Q_ν^μ 公式的 P_ν^μ 及 Q_ν^μ 的公式可以从上几節中依照 $z=x\pm i0$ 以 $(1-x)e^{\pm i\pi}$ 代 $(z-1)$、以 $(1-x^2)e^{\pm i\pi}$ 代 (z^2-1)，以 $x+1$ 代 $z+1$ $(-1<x<1)$ 而求得

对于这些函数，我們有下列关系式:

(3) $P_\nu^\mu(x+i0)=\dfrac{e^{-\frac12 i\mu\pi}}{\Gamma(1-\mu)}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac12\mu}F(-\nu,\nu+1;1-\mu;\tfrac12-\tfrac12 x)$,

(4) $P_\nu^\mu(x-i0)=\dfrac{e^{\frac12 i\mu\pi}}{\Gamma(1-\mu)}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac12\mu}F(-\nu,\nu+1;1-\mu;\tfrac12-\tfrac12 x)$,

(5) $e^{\frac12 i\mu\pi}P_\nu^\mu(x+i0)=e^{-\frac12 i\mu\pi}P_\nu^\mu(x-i0)=\mathbf{P}_\nu^\mu(x)$,

(6) $\mathbf{P}_\nu^\mu(x)=\dfrac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac12\mu}F(-\nu,\nu+1;1-\mu;\tfrac12-\tfrac12 x)$

$-1<x<1$,

(7) $\mathbf{P}_{-\nu-1}^\mu(x)=\mathbf{P}_\nu^\mu(x)$,

(8) $e^{\frac12 i\mu\pi}Q_\nu^\mu(x+i0)-e^{\frac12 i\mu\pi}Q_\nu^\mu(x-i0)=i\pi e^{i\mu\pi}\mathbf{P}_\nu^\mu(x)$,

(9) $e^{-i\mu\pi}Q_\nu^\mu(x\pm i0)=e^{\pm\frac12 i\mu\pi}[\mathbf{Q}_\nu^\mu(x)\mp i(\pi/2)\mathbf{P}_\nu^\mu(x)]$,

(10) $\mathbf{Q}_\nu^\mu(x)=\dfrac{\Gamma(1+\nu+\mu)\Gamma(-\mu)}{2\Gamma(1+\nu-\mu)}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac12\mu}$

$\times F(-\nu,\nu+1;\mu+1;\tfrac12-\tfrac12 x)+\tfrac12\Gamma(\mu)\cos(\mu\pi)$

$\times\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac12\mu}F(-\nu,\nu+1;1-\mu;\tfrac12-\tfrac12 x)$,

(11) $(1-x^2)^{\frac12\mu}2^{-\mu}\pi^{-\frac12}\mathbf{P}_\nu^\mu(x)$

$=\dfrac{F(-\frac12\mu-\frac12\nu,\frac12-\frac12\mu+\frac12\nu;\frac12;x^2)}{\Gamma(\frac12-\frac12\nu-\frac12\mu)\Gamma(1+\frac12\nu-\frac12\mu)}$

$-\dfrac{2xF(\frac12-\frac12\nu-\frac12\mu,1+\frac12\nu-\frac12\mu;\frac32;x^2)}{\Gamma(\frac12+\frac12\nu-\frac12\mu)\Gamma(-\frac12\nu-\frac12\mu)}$,

(12) $(1-x^2)^{\frac12\mu}2^{-\mu}\pi^{-3/2}\mathbf{Q}_\nu^\mu(x)$

$=\dfrac{\cot[\frac12\pi(\nu+\mu)]xF(\frac12-\frac12\nu-\frac12\mu,\frac12\nu-\frac12\mu+1;\frac32;x^2)}{\Gamma(\frac12+\frac12\nu-\frac12\mu)\Gamma(-\frac12\nu-\frac12\mu)}$

$-\dfrac{\frac12\tan[\frac12\pi(\nu+\mu)]F(-\frac12\nu-\frac12\mu,\frac12+\frac12\nu-\frac12\mu;\frac12;x^2)}{\Gamma(1+\frac12\nu-\frac12\mu)\Gamma(\frac12-\frac12\nu-\frac12\mu)}$,

(13) $2\mathbf{Q}_\nu^\mu(x)\sin(\mu\pi)=\pi\left[\mathbf{P}_\nu^\mu(x)\cos(\mu\pi)-\dfrac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\mathbf{P}_\nu^{-\mu}(x)\right]$,

(14) $\mathbf{P}_\nu^\mu(-x)=\mathbf{P}_\nu^\mu(x)\cos[\pi(\nu+\mu)]$

$-(2/\pi)\mathbf{Q}_\nu^\mu(x)\sin[\pi(\nu+\mu)]$ $\qquad 0<x<1$,

(15) $\mathbf{Q}_\nu^\mu(-x)=-\mathbf{Q}_\nu^\mu(x)\cos[\pi(\nu+\mu)]$

$-\tfrac12\pi\mathbf{P}_\nu^\mu(x)\sin[\pi(\nu+\mu)]$ $\qquad 0<x<1$,

(16) $\sin[\pi(\nu-\mu)]\,Q^{\mu}_{-\nu-1}(x)$
$=\sin[\pi(\nu+\mu)]\,Q^{\mu}_{\nu}(x)-\pi\cos(\nu\pi)\cos(\mu\pi)P^{\mu}_{\nu}(x)$,

(17) $\Gamma(\nu+\mu+1)P^{-\mu}_{\nu}(x)$
$=\Gamma(\nu-\mu+1)[P^{\mu}_{\nu}(x)\cos(\mu\pi)-(2/\pi)\sin(\mu\pi)Q^{\mu}_{\nu}(x)]$,

(18) $\Gamma(\nu+\mu+1)Q^{-\mu}_{\nu}(x)$
$=\Gamma(\nu-\mu+1)[Q^{\mu}_{\nu}(x)\cos(\mu\pi)+\frac{1}{2}\pi P^{\mu}_{\nu}(x)\sin(\mu\pi)]$.

方　程	可从下面式子中得到証明
(3)	3-2(3) 及 3-2(12)
(4)	3-2(3) 及 3-2(12)
(5)	(3) 及 (4)
(6)	(1)、(3) 及 (4)
(7)	(6)
(8)	(6) 及 3-2(32)
(9)	(8) 及 (2)
(10)	(2) 及 3-2(32)
(11)	3-2(22)、(1), 及 3-2(12)
(12)	3-2(40), (2) 及 3-2(12)
(13)	3-3(4), (1), 及 (9)
(14)	3-3(10)、(7) 及 (9)
(15)	3-3(12), (2) 及 (3)
(16)	3-3(3)、(5) 及 (2)
(17)	(13)
(18)	3-3(2)、(9) 及 (2)

对于整数 m 及 n，从(14)及(15)式可得

(19) $P^{m}_{n}(-x)=(-1)^{m+n}P^{m}_{n}(x)$; $Q^{m}_{n}(-x)=(-1)^{m+n+1}Q^{m}_{n}(x)$.

对于 $x=0$，由 (11) 及 (12) 知

(20) $P^{\mu}_{\nu}(0)=2^{\mu}\pi^{-\frac{1}{2}}\cos[\frac{1}{2}\pi(\nu+\mu)]$
$\times\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu)/\Gamma(1+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)$,

(21) $Q^{\mu}_{\nu}(0)=-2^{\mu-1}\pi^{\frac{1}{2}}\sin[\frac{1}{2}\pi(\nu+\mu)]$
$\times\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu)/\Gamma(1+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)$.

因为 $\dfrac{d}{dz}F(a, b; c; z)\Big|_{z=0}=\dfrac{ab}{c}$. 故由(11)及(12)得

(22) $$\left(\frac{dQ_\nu^\mu(x)}{dx}\right)_{x=0}=2^\mu\pi^{\frac{1}{2}}\cos\left[\tfrac{1}{2}\pi(\nu+\mu)\right]\frac{\Gamma(1+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)},$$

(23) $$\left(\frac{dP_\nu^\mu(x)}{dx}\right)_{x=0}=2^{\mu-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\sin\left[\tfrac{1}{2}\pi(\nu+\mu)\right]\frac{\Gamma(1+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)}.$$

此外,由方程(20)至(23)可得

(24) $$\left[P_\nu^\mu(x)\frac{d}{dx}Q_\nu^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)\frac{d}{dx}P_\nu^\mu(x)\right]_{x=0}$$
$$=\frac{2^{2\mu}\Gamma(1+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu)\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)}.$$

因为从 3-2 節有

$$P_\nu^\mu(x)\frac{d}{dx}Q_\nu^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)\frac{d}{dx}P_\nu^\mu(x)=C(1-x^2)^{-1}.$$

常数 c 可令 $x=0$ 并应用(24)来确定. 因而

(25) $$(1-x^2)\left[P_\nu^\mu(x)\frac{d}{dx}Q_\nu^\mu(x)-Q_\nu^\mu(x)\frac{d}{dx}P_\nu^\mu(x)\right]$$
$$=\frac{2^{2\mu}\Gamma(1+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu)\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)}.$$

3-5. $P_\nu^\mu(\cos\theta)$ 及 $Q_\nu^\mu(\cos\theta)$的三角展开式

在 3-2(45)式中令 $z=\cos\theta\pm i0$, $(z^2-1)^{\frac{1}{2}}=e^{\pm\frac{1}{2}i\pi}\sin\theta$, 则

(1) $$e^{-i\mu\pi}Q_\nu^\mu(\cos\theta\pm i0)\Gamma(\nu+3/2)=\pi^{\frac{1}{2}}2^\mu\Gamma(\nu+\mu+1)e^{\pm\frac{1}{2}i\mu\pi}$$
$$\times(\sin\theta)^\mu e^{\mp i\theta(1+\nu+\mu)}F(\tfrac{1}{2}+\mu, 1+\nu+\mu; \nu+3/2; e^{\mp i2\theta}),$$

因此,应用 3-4(8)及 2-1(2), 得

(2) $$P_\nu^\mu(\cos\theta)=\pi^{-\frac{1}{2}}2^{\mu+1}(\sin\theta)^\mu\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}$$
$$\times\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}+\mu)_l(1+\nu+\mu)_l}{l!(\nu+3/2)_l}\sin\left[(2l+\nu+\mu+1)\theta\right].$$

同理由 3-4(3)

(3) $Q_\nu^\mu(\cos\theta)=\pi^{\frac{1}{2}}2^\mu(\sin\theta)^\mu\dfrac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}$

$$\times\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}+\mu)_l(1+\nu+\mu)_l}{l!(\nu+3/2)_l}\cos[(2l+\nu+\mu+1)\theta].$$

这二个級数当 $0<\theta<\pi$ 时均收斂．同样从 3-2(44) 可得

(4) $e^{-i\mu\pi}Q_\nu^\mu(\cos\theta\pm i0)\Gamma(\nu+3/2)=\pi^{\frac{1}{2}}(2\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}e^{\mp i[\frac{1}{4}\pi+(\nu+\frac{1}{2})\theta]}$

$$\times F\left(\tfrac{1}{2}+\mu,\tfrac{1}{2}-\mu;\nu+3/2;\frac{\pm ie^{\mp i\theta}}{2\sin\theta}\right)\Gamma(\nu+\mu+1)$$

因此，应用 3-4(8)，3-4(2) 及 2-1(2)，得

(5) $\Gamma(\nu+3/2)P_\nu^\mu(\cos\theta)=2^{\frac{1}{2}}(\pi\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\nu+\mu+1)$

$$\times\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{(\frac{1}{2}+\mu)_l(\frac{1}{2}-\mu)_l}{l!(2\sin\theta)^l(\nu+3/2)_l}$$

$$\times\sin[(\nu+l+\tfrac{1}{2})\theta+(\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{4})\pi+\tfrac{1}{2}l\pi],$$

(6) $\Gamma(\nu+3/2)Q_\nu^\mu(\cos\theta)=\pi^{\frac{1}{2}}(2\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\nu+\mu+1)$

$$\times\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{(\frac{1}{2}+\mu)_l(\frac{1}{2}-\mu)_l}{l!(2\sin\theta)^l(\nu+3/2)_l}$$

$$\times\cos[(\nu+l+\tfrac{1}{2})\theta+(\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{4})\pi+\tfrac{1}{2}l\pi],$$

由(4)式可看出，如 $\pi/6<\theta<5\pi/6$，则展开式 (5) 及 (6) 均收斂．由 3-4(5) 及 3-2(20)，3-2(7) 及 3-2(3) 分别可得

(7) $\Gamma(1-\mu)P_\nu^\mu(\cos\theta)$

$$=(\tfrac{1}{2}\sin\theta)^{-\mu}F[\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}\mu;-\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}\mu;1-\mu;(\sin\theta)^2],\quad 0<\theta<\pi/2,$$

(8) $\Gamma(1-\mu)P_\nu^\mu(\cos\theta)$

$$=(\tfrac{1}{2}\sin\theta)^{-\mu}F[1+\nu-\mu,-\nu-\mu;1-\mu;(\sin\tfrac{1}{2}\theta)^2]\quad 0<\theta<\pi.$$

(9) $\Gamma(1-\mu)P_\nu^\mu(\cos\theta)$

$$=(\cot\tfrac{1}{2}\theta)^\mu F[-\nu,\nu+1;1-\mu;(\sin\tfrac{1}{2}\theta)^2]\qquad 0<\theta<\pi,$$

当 θ 很小时，下面一个 $P_\nu^{-\mu}(\cos\theta)$ 的公式是適用的(Mac Donald, 1914, p. 220)：

(10) $P_\nu^{-\mu}(\cos\theta)=[(\nu+\tfrac{1}{2})\cos\tfrac{1}{2}\theta]^{-\mu}$

$$\times\{J_\mu(\alpha)+(\sin\tfrac{1}{2}\theta)^2[(1/6)\alpha J_{\mu+3}(\alpha)-J_{\mu+2}(\alpha)$$

$$+(2\alpha)^{-1}J_{\mu+1}(\alpha)]+O[(\sin\tfrac{1}{2}\theta)^4]\}.$$

此处 $\alpha=(2\nu+1)\sin\frac{1}{2}\theta$, $J_\lambda(\alpha)$ 表示貝塞尔函数(見第七章).

要得这一公式,可將 3-4(6) 寫成下面的形式:

$$P_\nu^{-\mu}(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}\mu}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)\Gamma(\mu+n+1)}\text{[1]}\times\frac{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x)^n}{n!}.$$

而后將 $\Gamma(\nu+n+1)/\Gamma(\nu-n+1)$ 用 $\nu+\frac{1}{2}$ 的冪表示即得.

3-6-1. μ 及 ν 的特殊値

如 μ 是正整数, $\mu=m(m=1,2,3,\cdots)$, 則由 3-3(7) 及3-2(7) 可得

(1) $\Gamma(\nu-m+1)m!P_\nu^m(z)$
$$=2^{-m}\Gamma(\nu+m+1)(z^2-1)^{\frac{1}{2}m}F(1+m+\nu,m-\nu;1+m;\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}z),$$

又由 3-4(5) 及 (1),

(2) $\Gamma(\nu-m+1)m!\,P_\nu^m(x)$
$$=(-2)^{-m}\Gamma(\nu+m+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}m}F(1+m+\nu,m-\nu;1+m;\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}x).$$

如 ν 是整数, 3-3(1) 式表明它并沒有把 ν 假定为一非負整数的限制, $\nu=n$, $n=0,1,2,\cdots$. 我們应区別三种情况:

(i) 如 μ 不是正整数,則 3-2(3) 中的超比級数是 z 的 n 次多項式.

(ii) 如 $\mu=m$, $m=1,2,3,\cdots$ 且 $n\geqslant m$, (1) 及 (2) 有效,其所含的超比級数是 z 的 $n-m$ 次多項式.

(iii) 如 $\mu=m$, $m=1,2,3,\cdots$ 且 $m>n$, 則 $P_\nu^\mu(z)$ 及 $P_\nu^\mu(x)$ 恆等于零. 不过 $\Gamma(\nu-\mu+1)P_\nu^\mu(z)$ 及 $\Gamma(\nu-\mu+1)P_\nu^\mu(x)$ 当 $\mu\to m$, $\nu\to n$ 时趋向于有限的極限.

習惯上寫 $P_\nu^0(z)=P_\nu(z)$ 等等. 通常 $P_\nu(z)$ 及 $Q_\nu(z)$ 称为勒上特函数, $P_\nu^\mu(z)$ 及 $Q_\nu^\mu(z)$ 称为連帶勒上特函数.

---

[1] 原本作 $\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu+n+1)\Gamma(\mu+n+1)}$ ——譯者注.

由 3-2(7) 可得

(3) $$P_\nu(z)=F(1+\nu,\ -\nu;\ 1;\ \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}z).$$

如果我們將(3)式对 z 微分 m 次($m=1, 2, 3, \cdots$)并考察 2-1(7), 1-20(5), 3-2(7) 及 3-3(7) 各式,則得

(4) $$P_\nu^m(z)=(z^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m P_\nu(z)}{dz^m}\qquad m=1, 2, 3, \cdots$$

因而,由 3-3(11) 及 3-2(8)

(5) $$Q_\nu^m(z)=(z^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m Q_\nu(z)}{dz^m}\qquad m=1, 2, 3, \cdots$$

由(4), (5), 3-4(2)及3-4(5), 得

(6) $$P_\nu^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m P_\nu(x)}{dx^m},$$

(7) $$Q_\nu^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m Q_\nu(x)}{dx^m}$$

$$m=1, 2, 3, \cdots,\quad -1<x<1.$$

再,由(3), 2-1(7)及 3-2(7) 可得

(8) $$P_\nu^{-m}(z)=(z^2-1)^{-\frac{1}{2}m}\int_1^z\cdots\int_1^z P_\nu(z)\,(dz)^m,$$

(9) $$Q_\nu^{-m}(z)=(-1)^m(z^2-1)^{-\frac{1}{2}m}\int_z^\infty\cdots\int_z^\infty Q_\nu(z)\,(dz)^m,$$

(10) $$P_\nu^{-m}(x)=(-1)^m(1-x^2)^{-\frac{1}{2}m}\int_1^x\cdots\int_1^x P_\nu(x)\,(dx)^m.$$

此外,如 μ 是正整数, $\mu=m$, ($m=1, 2, 3, \cdots$),公式 3-2(32) 变成不定式,它可以用一般法則來求值. 結果是 (Hobson, 1931, p. 205)

(11) $$\frac{2\pi}{\sin(\nu\pi)}Q_\nu^m(z)$$

$$=\frac{\pi}{\sin(\nu\pi)}P_\nu^m(z)\left[\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)-2\gamma-\psi(\nu+m+1)\right.$$

$$\left.-\psi(\nu-m+1)\right]-e^{im\pi}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}m}\sum_{r=0}^{m-1}\Gamma(r-\nu)$$

$$\times\Gamma(r+\nu+1)\,\Gamma(m-r)\,\frac{\cos(r\pi)}{r!}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}z\right)^r$$

$$-\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}m}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\Gamma(m+l-\nu)\Gamma(m+l+\nu+1)}{l!\,(m+l)!}$$

$$\times\sigma(l)\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}z\right)^{m+l}-\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu-m+1)}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}m}$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(r-\nu)\Gamma(r+\nu+1)}{r!\,(r+m)!}\sigma(m+r)\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}z\right)^{r}$$

其中

$$\sigma(l)=1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{l}=\psi(l+1)-\psi(1)=\psi(l+1)+\gamma,$$

$$\sigma(0)=0.$$

如 μ 是負整数,則应用 3-3(2) 及 (11) 式. 当 $m=0$ 时, (11) 式变成

$$Q_\nu(z)=\tfrac{1}{2}P_\nu(z)\left[\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)-2\gamma-2\psi(\nu+1)\right]$$

$$-\pi^{-1}\sin(\nu\pi)\sum_{l=1}^{\infty}\Gamma(-\nu+l)\Gamma(\nu+l+1)\sigma(l)\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}z\right)^{l}/(l!)^{2}.$$

如 ν 也是正整数, $\nu=n\,(n=1, 2, 3, \cdots)$ 則

$$Q_n(z)=\tfrac{1}{2}P_n(z)\left[\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)-2\sigma(n)\right]$$

$$+\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l}(n+l)!\,\sigma(l)\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}z\right)^{l}/[(l!)^{2}(n-l)!]$$

(并見 3-6-2).

从 3-2(16), 3-2(20), 3-2(26), 3-2(36), 3-2(37) 及 3-2(44) 等式可知 $P_{\nu+n}^{-\nu}$, $P_\nu^{\nu+2n+1}$, $P_\nu^{\pm(n+\frac{1}{2})}$, $Q_\nu^{\nu+n+1}$, $Q_\nu^{-\nu-n-1}$, $Q_\nu^{\pm(n+\frac{1}{2})}$ 等表达式的項数在 $n=0, 1, 2, \cdots$ 时化为有尽. 特别是

$$(12)\quad\begin{cases}P_\nu^{\frac{1}{2}}(z)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}(z^2-1)^{-\frac{1}{4}}\{[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{\nu+\frac{1}{2}}\\ \qquad+[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu-\frac{1}{2}}\}\\ Q_\nu^{\frac{1}{2}}(z)=i(\pi/2)^{\frac{1}{2}}(z^2-1)^{-\frac{1}{4}}[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu-\frac{1}{2}},\end{cases}$$

$$(13)\quad\begin{cases}P_\nu^{-\frac{1}{2}}(z)=(2/\pi)^{\frac{1}{2}}\dfrac{(z^2-1)^{-\frac{1}{4}}}{2\nu+1}\{[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{\nu+\frac{1}{2}}\\ \qquad-[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu-\frac{1}{2}}\}\\ Q_\nu^{-\frac{1}{2}}(z)=i(2\pi)^{\frac{1}{2}}\dfrac{(z^2-1)^{-\frac{1}{4}}}{2\nu+1}[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu-\frac{1}{2}},\end{cases}$$

由 3-2(16) 式可得

(14) $$\begin{cases} P_\nu^{-\nu}(z) = 2^{-\nu}(z^2-1)^{\frac{1}{2}\nu}/\Gamma(\nu+1) \\ P_\nu^{-\nu}(\cos\theta) = 2^{-\nu}(\sin\theta)^\nu/\Gamma(\nu+1). \end{cases}$$

由方程(11)至(14)式，应用 3-3(13) 及 3-3(14) 可以導出其他許多公式.

3-6-2. 勒上特多項式

勒上特函数的一个特别重要的情形是其中的 $\mu=0$ 及 ν 为整数(并見 10-10 節). 我們可以假定 ν 为非負数. 由 3-2(22) 式可知，对于 $n=0, 1, 2, \cdots$

(15) $$P_{2n}(z) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{n!\Gamma(\frac{1}{2}-n)} F(-n, n+1/2; 1/2; z^2)$$
$$= \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} F(-n, n+1/2; 1/2; z^2),$$
$$P_{2n+1}(z) = \frac{-2\pi^{\frac{1}{2}} z}{n!\Gamma(-\frac{1}{2}-n)} F(-n, n+3/2; 3/2; z^2)$$
$$= \frac{(-1)^n(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} zF(-n, n+3/2; 3/2; z^2),$$

或，在二种情形下，

(16) $$P_n(z) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\left[z^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)} z^{n-4} - \cdots\right],$$

上式又可寫为

(17) $$P_n(z) = (2^n n!)^{-1} \frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n.$$

这就是罗特列恰公式.

因此 $P_n(z)$ 是 z 的 n 次多項式，与 n 具有相同的宇称.

$$P_n(-z) = (-1)^n P_n(z).$$

这一多項式就称为勒上特多項式. 是区間$(-1, 1)$的一个正交系. 它的所有根都是实数，單純而且在 -1 与 $+1$ 之間(見第十章).

由 3-5(2) 及 3-5(3) 可得

$$(18)\quad P_n(\cos\theta)=\frac{2^{2n+2}(n!)^2}{\pi(2n+1)!}\Big[\sin(n+1)\theta+\frac{n+1}{2n+3}\sin(n+3)\theta$$

$$+\frac{1\cdot3}{2!}\frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)}\sin(n+5)\theta$$

$$+\frac{1\cdot3\cdot5}{3!}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)}\sin(n+7)\theta+\cdots\Big]$$

$$(19)\quad Q_n(\cos\theta)=\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}\Big[\cos(n+1)\theta+\frac{n+1}{2n+3}\cos(n+3)\theta$$

$$+\frac{1\cdot3}{2!}\frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)}\cos(n+5)\theta$$

$$+\frac{1\cdot3\cdot5}{3!}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)}\cos(n+7)\theta+\cdots\Big]$$

$$0<\theta<\pi.$$

由 3-2(40) 得

$$Q_0(z)=\mp\tfrac{1}{2}i\pi+zF(1/2,1;3/2;z^2)=\mp\tfrac{1}{2}i\pi+\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right),$$

式中上面的或下面的符号随 $\operatorname{Im} z\gtrless0$ 而取．由于 $1-z=(z-1)e^{\mp i\pi}$，故

$$(20)\quad Q_0(z)=\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right),$$

又由 3-4(12)，

$$(21)\quad Q_0(x)=xF(1/2,1;3/2,x^2)=\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

对于 $\mu=0$，及 $\nu=n$，3-2(13) 式给出：

$$W\{P_n(z),Q_n(z)\}=[P_n(z)]^2\frac{d}{dz}\left[\frac{Q_n(z)}{P_n(z)}\right]=-(z^2-1)^{-1}$$

因而

$$(22)\quad Q_n(z)=P_n(z)\int_z^\infty(t^2-1)^{-1}[P_n(t)]^{-2}\,dt,$$

式中積分路綫并不与剖割直交．因为 $P_0(t)=1$，[見 3-6(3)]，故 (20) 及 (22) (后者的 $n=0$) 是符合的．

今，$P_n(t)$ 是 n 次多项式，有 n 个相異的零点，如 $t_1, t_2 \cdots t_n$，且因 $P_n(1)=(-1)^n P_n(-1)=1$，故知沒有一个零点等于 ± 1．分解为部分分式得

$$(t^2-1)^{-1}[P_n(t)]^{-2}\,dt=\tfrac{1}{2}(t-1)^{-1}-\tfrac{1}{2}(t+1)^{-1}+\sum_{l=1}^{n} b_l(t-t_l)^{-2}$$

因此由(22)式得

$$(23)\quad Q_n(z)=\tfrac{1}{2}P_n(z)\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)+P_n(z)\sum_{l=1}^{n}\frac{b_l}{(z-z_l)},$$

或

$$(24)\quad Q_n(z)=\tfrac{1}{2}P_n(z)\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)-W_{n-1}(z),$$

其中 $W_{n-1}(z)$ 是 $n-1$ 次多項式．例如

$$Q_1(z)=\tfrac{1}{2}z\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)-1,$$

$$(25)\quad Q_2(z)=\tfrac{1}{2}P_2(z)\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)-\frac{3}{2}z,$$

$$Q_3(z)=\tfrac{1}{2}P_3(z)\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)-\frac{5}{2}z^2+\frac{2}{3}.$$

从(24)顯然可知 $Q_n(z)$ 在 $z=\pm 1$ 具有对数支点，但沒有支点在無窮远．因此函数的任一分支在沿实軸的 -1 至 1 切割的 z 平面内必是單値而正則的．

从(24)及 3-4(2) 得

$$(26)\quad Q_n(x)=\tfrac{1}{2}P_n(x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-W_{n-1}(x),$$

將(24)式代入 $\mu=0$ 的勒上特方程 3-2(1) 中，可知 $W_{n-1}(n=1, 2, 3, \cdots)$ 滿足如下方程

$$(27)\quad (1-z^2)\frac{d^2W_{n-1}}{dz^2}-2z\frac{dW_{n-1}}{dz}+n(n+1)W_{n-1}=2\frac{dP_n}{dz}$$

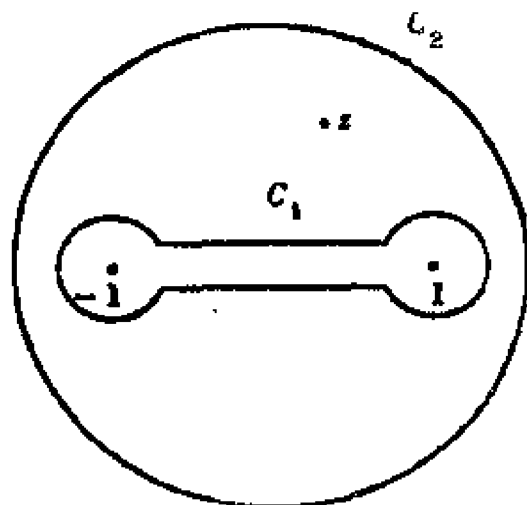
从而可知(見 Hobson, 1931, p. 54)

$$(28)\quad W_{n-1}(z)=\sum_{m=0}^{[n/2-\frac{1}{2}]}\frac{(2n-4m-1)}{(n-m)(2m+1)}P_{n-2m-1}(z).$$

这就是克列司托費耳公式．

其次，設 z 是 w 平面內的任一固定的点，不在实軸的 -1 与 1 之間，对圖上所画的圍綫 c_1 及 c_2 所圍的区域应用柯西定理，則

$$2\pi i Q_n(z)=\int_{c_2} Q_n(w)(w-z)^{-1}\,dw-\int_{c_1} Q_n(w)(w-z)^{-1}\,dw.$$



如果 c_2 的半徑無限增加，根据 3-2(5) 式可知 $\int_{c_2}\to 0$；而圓弧对 $\int_{c_1}$ 的分担將与其半徑同时消失．于是：

$$2\pi i Q_n(z)=\int_{-1}^{1}[Q_n(v-i0)-Q_n(v+i0)](z-v)^{-1}\,dv,$$

由于括号內的式子等于 $\pi i P_n(v)$，故得紐孟積分式：

$$Q_n(z)=\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}(z-v)^{-1}P_n(v)\,dv=(-1)^{n+1}Q_n(-z). \tag{29}$$

將(29)式寫成如下形式

$$Q_n(z)=\tfrac{1}{2}P_n(z)\int_{-1}^{1}(z-v)^{-1}dv-\tfrac{1}{2}\times\int_{-1}^{1}(z-v)^{-1}[P_n(z)-P_n(v)]\,dv, \tag{30}$$

与(24)式比較，可知

$$W_{n-1}(z)=\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}(z-v)^{-1}[P_n(z)-P_n(v)]\,dv. \tag{31}$$

紐孟公式(29)的普遍形式是(見 Gormley, 1934, p. 149)：

$$Q_\nu^\mu(z)=\tfrac{1}{2}e^{i\mu\pi}(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\int_{-1}^{1}(1-v^2)^{-\frac{\mu}{2}}(z-v)^{-1}P_\nu^\mu(v)\,dv, \tag{32}$$

$\nu+\mu=0,1,2,\cdots$, $\mathrm{Re}\,v>-1$, z 不在实轴上的 -1 与 1 之間；且(Wrinch, 1930, p. 1037).

$$P_n(z)\,Q_m(z)=\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}(z-v)^{-1}P_n(v)\,P_m(v)\,dv,$$

$n<m$, z 不在实軸上的 -1 与 1 之間，n, m 是整数。

对于勒上特多項式，我們有母函数：

(33)　$(1-2hz+h^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$=\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}h^nP_n(z), & \text{如 } |h|<\min|z\pm(z^2-1)^{\frac{1}{2}}| \\ \sum_{n=0}^{\infty}h^{-n-1}P_n(z), & \text{如 } |h|>\max|z\pm(z^2-1)^{\frac{1}{2}}|.\end{cases}$$

这个公式可以这样来証明：將(33)式分別展开为 h 的遞升及遞降級数，而后应用公式(16)(普遍的情形可參看 3-15 節)。

另一方面，如 $z=\mathrm{ch}\,(u+iv)$，(u, v 实数)，則当 $|h|<e^{\pm u}$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}h^nQ_n(z)$ 收斂。以(30)式所表示的 $Q_n(z)$ 代入，并注意(33)，可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(z)h^n=\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}(z-v)^{-1}(1-2hv+h^2)^{-\frac{1}{2}}\,dv,$$

或

(34)　$$\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(z)h^n=(1-2hz+h^2)^{-\frac{1}{2}}\ln\left[\frac{z-h+(1-2hz+h^2)^{\frac{1}{2}}}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right],$$

从 3-4(2) 式可得

(35)　$$\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(x)h^n=(1-2hx+h^2)^{-\frac{1}{2}}\ln\left[\frac{x-h+(1-2hx+h^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

对于 μ 及 ν 为整数时的其他結果可参看第 10 章，第 11 章，对于階次之和等于正整数的連帶勒上特函数的各种結果可参看3-15 節及麦克罗勃特的著作，1943, p. 1; 1947, p. 332.

3-7. 積分表示式

从 3-2(7) 及 2-12(10) 式立卽可得

(1) $$P_\nu^\mu(z)=\frac{2^{-\nu}(z^2-1)^{-\mu/2}}{\Gamma(-\mu-\nu)\Gamma(\nu+1)}\int_0^\infty (z+\operatorname{ch}t)^{\mu-\nu-1}(\operatorname{sh}t)^{2\nu+1}\,dt$$

$$\operatorname{Re}(-\mu)>\operatorname{Re}\nu>-1,$$

z 不在实軸上 -1 与 ∞ 之間.

同样,由 3-2(45) 及 2-12(14) 得

(2) $$\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\mu+\tfrac{1}{2})\,Q_\nu^\mu(z)=e^{i\mu\pi}\pi^{\frac{1}{2}}2^{-\mu}\Gamma(\nu+\mu+1)(z^2-1)^{\mu/2}$$
$$\times\int_0^\infty[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}t]^{-\nu-\mu-1}(\operatorname{sh}t)^{2\mu}\,dt,$$

(3) $$\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\mu+\tfrac{1}{2})Q_\nu^\mu(\operatorname{ch}\alpha)=e^{i\mu\pi}\pi^{\frac{1}{2}}2^{-\mu}\Gamma(\nu+\mu+1)(\operatorname{sh}\alpha)^\mu$$
$$\times\int_0^\infty(\operatorname{ch}\alpha+\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}t)^{-\nu-\mu-1}(\operatorname{sh}t)^{2\mu}\,dt,$$

上面二式在 $\operatorname{Re}(\nu\pm\mu+1)>0$ 时都有效.

在(3)式中,令 $e^v=\operatorname{ch}\alpha+\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}t$, 并应用 3-3(2) 可得

(4) $$Q_\nu^\mu(\operatorname{ch}\alpha)=(\tfrac{1}{2}\pi)^{\frac{1}{2}}e^{\mu\pi i}\frac{(\operatorname{sh}\alpha)^\mu}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)}\int_\alpha^\infty e^{-(\nu+\frac{1}{2})v}(\operatorname{ch}v-\operatorname{ch}\alpha)^{-\mu-\frac{1}{2}}\,dv.$$

$$\alpha>0,\ \operatorname{Re}(\nu+\mu+1)>0,\ \operatorname{Re}\mu<\tfrac{1}{2}.$$

此外,当 z 不在实軸的 -1 与 1 間时,从 3-2(36) 及 2-12(8)式可知

(5) $$Q_\nu^\mu(z)=e^{\mu\pi i}2^{-\nu-1}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)}(z^2-1)^{-\mu/2}$$
$$\times\int_0^\pi(z+\cos t)^{\mu-\nu-1}(\sin t)^{2\nu+1}\,dt$$

$$\operatorname{Re}\nu>-1,\ \operatorname{Re}(\nu+\mu+1)>0.$$

从 3-2(28) 及 2-12(8) 或从(5)及 3-3(14) 可得

(6) $$P_\nu^\mu(z)=\frac{\pi^{-\frac{1}{2}}2^\mu(z^2-1)^{-\mu/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)}$$
$$\times\int_0^\pi[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos t]^{\nu+\mu}(\sin t)^{-2\mu}\,dt.\qquad \operatorname{Re}\mu<\tfrac{1}{2};$$

由(6),

(7) $$P_\nu^\mu(\operatorname{ch}\alpha)=\frac{\pi^{-\frac{1}{2}}2^\mu(\operatorname{sh}\alpha)^{-\mu}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)}$$
$$\times\int_0^\pi(\sin t)^{-2\mu}(\operatorname{ch}\alpha+\operatorname{sh}\alpha\cos t)^{\nu+\mu}\,dt\qquad \operatorname{Re}\mu<\tfrac{1}{2}.$$

因而作代换 $\operatorname{ch}\alpha+\operatorname{sh}\alpha\cos t=e^v$，可得

(8) $$P_\nu^\mu(\operatorname{ch}\alpha)=(\tfrac{1}{2}\pi)^{-\frac{1}{2}}\frac{(\operatorname{sh}\alpha)^\mu}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)}\times\int_0^\alpha(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}v)^{-\mu-\frac{1}{2}}\operatorname{ch}[(\nu+\tfrac{1}{2})v]\,dv.\qquad \operatorname{Re}\mu<\tfrac{1}{2}.$$

把 $\int e^{(\nu+\frac{1}{2})v}(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}v)^{-\mu-\frac{1}{2}}dv$ 沿着矩形迴路積分，矩形的四頂点为 $(\pm c,0)$，$(\pm c,i\pi)$，刻鑿在点 $(\pm\alpha,0)$，則可得另外一个積分式．使 $c\to\infty$，并应用(8)可得 $P_\nu^\mu(\operatorname{ch}\alpha)$ 的積分式；在这里把 ν 变成 $-\nu-1$，而后运用 3-3(1) 將二式相加，結果得

(9) $$P_\nu^\mu(\operatorname{ch}\alpha)=(\tfrac{1}{2}\pi)^{-\frac{1}{2}}\frac{(\operatorname{sh}\alpha)^\mu}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)}\left\{\int_0^\infty\frac{\sin(\mu\pi)\operatorname{ch}[\nu+\frac{1}{2})t]}{(\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}\alpha)^{\mu+\frac{1}{2}}}dt-\int_0^\infty\frac{\sin(\nu\pi)\operatorname{ch}[(\nu+\frac{1}{2})t]}{(\operatorname{ch}t+\operatorname{ch}\alpha)^{\mu+\frac{1}{2}}}dt\right\}$$

$$\operatorname{Re}\mu<\tfrac{1}{2},\ \operatorname{Re}(\nu+\mu+1)>0,\ \operatorname{Re}(\mu-\nu)>0.$$

將由 7-3(31) 式所得的 $\mathrm{I}_{\nu+\frac{1}{2}}(t)$ 代入 7-8(6)，并改变積分次序，可知

(10) $$Q_\nu^\mu(z)=e^{\mu\pi i}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}(z^2-1)^{\mu/2}\Gamma(\mu+\tfrac{1}{2})\times\left\{\int_0^\pi(z-\cos t)^{-\mu-\frac{1}{2}}\cos[(\nu+\tfrac{1}{2})t]\,dt-\cos(\nu\pi)\int_0^\infty(z+\operatorname{ch}t)^{-\mu-\frac{1}{2}}e^{-(\nu+\frac{1}{2})t}dt\right\}$$

$$\operatorname{Re}\mu>-\tfrac{1}{2},\ \operatorname{Re}(\nu+\mu+1)>0.$$

式中 z 是不在实軸的 1 与 $-\infty$ 間的点．因而，参照 3-3(9)，得

(11) $$P_\nu^{-\mu}(z)=(\tfrac{1}{2}\pi)^{-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})(z^2-1)^{\mu/2}}{\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)}\times\int_0^\infty(z+\operatorname{ch}t)^{-\mu-\frac{1}{2}}\operatorname{ch}[(\nu+\tfrac{1}{2})t]\,dt$$

$$\operatorname{Re}(\mu-\nu)>0,\ \operatorname{Re}(\nu+\mu+1)>0.$$

式中 z 是不在实軸 -1 与 $-\infty$ 間的点．

应用揮普耳变换 3-3(13) 于 (11)，得

(12) $$Q_\nu^\mu(z)=e^{i\mu\pi}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\int_0^\infty [z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch} t]^{-\nu-1}\operatorname{ch}(\mu t)\,dt$$

$$\operatorname{Re}(\nu\pm\mu)>-1,\ \nu\neq -1,\ -2,\ -3,\cdots$$

应用 3-3(14) 式于 (10)，得

(13) $$P_\nu^\mu(z)=\frac{\Gamma(-\nu)}{\pi\Gamma(-\nu-\mu)}\left\{\int_0^\pi [z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos t]^\nu \cos(\mu t)\,dt\right.$$

$$\left.+\sin(\mu\pi)\int_0^\infty [z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch} t]^\nu e^{\mu t}\,dt\right\}$$

$$\operatorname{Re}(\nu+\mu)<0,\ \operatorname{Re} z>0,\ \operatorname{Re}\nu<0.$$

因而，如 μ 是整数，$\mu=m(m=0,1,2,\cdots)$[見 (1, 2, 3)]，得

(14) $$P_\nu^m(z)=\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\pi\Gamma(\nu+1)}\int_0^\pi [z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos t]^\nu \cos(mt)\,dt$$

$$\operatorname{Re} z>0.$$

上式可寫为

(15) $$P_\nu^m(z)=\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{2\pi\Gamma(\nu+1)}\int_{-\pi}^\pi [z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos t]^\nu e^{imt}\,dt$$

$$\operatorname{Re} z>0.$$

故作代換 $t=\phi-\psi$，得

(16) $$P_\nu^m(z)\cos(m\psi)=\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{2\pi\Gamma(\nu+1)}$$

$$\times\int_0^{2\pi} [z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\phi-\psi)]^\nu \cos(m\phi)\,d\phi,\ \operatorname{Re} z>0,$$

(17) $$P_\nu^m(z)\sin(m\psi)=\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{2\pi\Gamma(\nu+1)}$$

$$\times\int_0^{2\pi} [z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\phi-\psi)]^\nu \sin(m\phi)\,d\phi,\ \operatorname{Re} z>0.$$

如 $\psi=0$，(16) 可以推廣至 m 的不加限制的数，且 $\operatorname{Re}\nu>-1$ (見 Erdélyi, 1941, p. 351).

如 $m=0$，(16) 式的推廣式为 [見 Whittaker-Watson, 1927, p. 329].

(18) $$P_\nu[zz'-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}(z'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\psi]$$

$$=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} [z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\psi-\phi)]^\nu$$

$$\times[z'+(z'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\phi]^{-\nu-1}\,d\phi \qquad \operatorname{Re} z>0,\ \operatorname{Re} z'>0.$$

$P_\nu^\mu(z)$ 的另外的表达式可以从上面的结果应用3-3(1)式來導出.

利用 3-4(5), 3-4(8), 3-4(2), 还可以導出 $P_\nu^\mu(x)$ 及 $Q_\nu^\mu(x)$ 的类似公式. 从 3-4(8) 及 (2), 取 $z=\cos\theta$, 可得

(19) $$\Gamma(\mu+\tfrac{1}{2})\Gamma(\nu-\mu+1)P_\nu^\mu(\cos\theta)=i\pi^{-\frac{1}{2}}2^{-\mu}\Gamma(\nu+\mu+1)(\sin\theta)^\mu$$
$$\times\left[\int_0^\infty(\cos\theta+i\sin\theta\operatorname{ch}t)^{-\nu-\mu-1}(\operatorname{sh}t)^{2\mu}dt\right.$$
$$\left.-\int_0^\infty(\cos\theta-i\sin\theta\operatorname{ch}t)^{-\nu-\mu-1}(\operatorname{sh}t)^{2\mu}dt\right]$$
$$\operatorname{Re}\mu>-\tfrac{1}{2},\ \operatorname{Re}(\nu\pm\mu+1)>0.$$

从 3-4(2) 及 (2) 得

(20) $$\Gamma(\mu+\tfrac{1}{2})\Gamma(\nu-\mu+1)Q_\nu^\mu(\cos\theta)=\pi^{\frac{1}{2}}2^{-\mu-1}\Gamma(\nu+\mu+1)(\sin\theta)^\mu$$
$$\times\left[\int_0^\infty(\cos\theta+i\sin\theta\operatorname{ch}t)^{-\nu-\mu-1}(\operatorname{sh}t)^{2\mu}dt\right.$$
$$\left.+\int_0^\infty(\cos\theta-i\sin\theta\operatorname{ch}t)^{-\nu-\mu-1}(\operatorname{sh}t)^{2\mu}dt\right]$$
$$\operatorname{Re}\mu>-\tfrac{1}{2},\ \operatorname{Re}(\nu\pm\mu+1)>0.$$

从 3-4(8) 及 (12), 3-4(2) 及 (12) 分别可得

(21) $$P_\nu^\mu(\cos\theta)=\frac{i\Gamma(\nu+1)}{\pi\Gamma(\nu-\mu+1)}\left[e^{-i\frac{1}{2}\mu\pi}\int_0^\infty(\cos\theta+i\sin\theta\operatorname{ch}t)^{-\nu-1}\right.$$
$$\left.\times\operatorname{ch}(\mu t)dt-e^{\frac{1}{2}i\mu\pi}\int_0^\infty(\cos\theta-i\sin\theta\operatorname{ch}t)^{-\nu-1}\operatorname{ch}(\mu t)dt\right]$$

(22) $$Q_\nu^\mu(\cos\theta)=\frac{\Gamma(\nu+1)}{2\Gamma(\nu-\mu+1)}$$
$$\times\left[e^{-\frac{1}{2}i\mu\pi}\int_0^\infty(\cos\theta+i\sin\theta\operatorname{ch}t)^{-\nu-1}\operatorname{ch}(\mu t)dt\right.$$
$$\left.+e^{\frac{1}{2}i\mu\pi}\int_0^\infty(\cos\theta-i\sin\theta\operatorname{ch}t)^{-\nu-1}\operatorname{ch}(\mu t)dt\right]$$

以上二式对 $\operatorname{Re}(\nu\pm\mu)>-1$, $\nu\neq-1,-2,-3,\cdots$都有效.

从 3-4(5) 及 (6) 式可得

(23) $$P_\nu^\mu(\cos\theta)=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}2^\mu(\sin\theta)^{-\mu}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)}$$
$$\times\int_0^\pi(\cos\theta+i\sin\theta\cos t)^{\nu+\mu}(\sin t)^{-2\mu}dt\qquad\operatorname{Re}\mu<\tfrac{1}{2}.$$

又从 3-4(5) 及 (13) 可得

$$(24)\quad P_\nu^\mu(\cos\theta)=\frac{e^{\frac{1}{2}i\mu\pi}\Gamma(-\nu)}{\Gamma(-\nu-\mu)}\left[\int_0^\pi(\cos\theta-i\sin\theta\operatorname{ch}t)^\nu\cos(\mu t)\,dt\right.$$

$$\left.+\sin(\mu\pi)\int_0^\infty(\cos\theta+i\sin\theta\operatorname{ch}t)^\nu e^{\mu t}\,dt\right]$$

$$0<\theta<\pi/2,\ \operatorname{Re}(-\nu-\mu)>0.$$

从 3-4(5), (16) 及 (17) 式可得

$$(25)\quad P_\nu^m(\cos\theta)\cos(m\psi)=i^m\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{2\pi\Gamma(\nu+1)}$$

$$\times\int_0^{2\pi}[\cos\theta+i\sin\theta\cos(\phi-\psi)]^\nu\cos(m\phi)\,d\phi,$$

$$(26)\quad P_\nu^m(\cos\theta)\sin(m\psi)=i^m\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{2\pi\Gamma(\nu+1)}$$

$$\times\int_0^{2\pi}[\cos\theta+i\sin\theta\cos(\phi-\psi)]^\nu\sin(m\phi)\,d\phi$$

$$0<\theta<\pi/2.$$

如 $\pi/2<\theta<\pi$, (25) 及 (26) 式右边部分可用 3-4(14) 式来計算.

作代换 $\cos\theta+i\sin\theta\cos t=e^{iv}$, 由 (23) 可得

$$(27)\quad P_\nu^\mu(\cos\theta)=(\tfrac{1}{2}\pi)^{-\frac{1}{2}}\frac{(\sin\theta)^\mu}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu)}$$

$$\times\int_0^\theta(\cos v-\cos\theta)^{-\mu-\frac{1}{2}}\cos[(\nu+\tfrac{1}{2})v]\,dv$$

$$0<\theta<\pi,\ \operatorname{Re}\mu<\tfrac{1}{2}.$$

这就是米勒-狄里克雷公式.

此外, (見 Copson, 1945, p. 81)

$$(28)\quad Q_n(\cos\theta)=\tfrac{1}{4}i^{n+1}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin t|^n(\sin\theta+i\cos\theta\sin t)^{-n-1}\,dt.$$

下式

$$(29)\quad \Gamma(\mu)P_\nu^{-\mu}(z)=(z^2-1)^{-\mu/2}\int_1^z P_\nu(t)(z-t)^{\mu-1}\,dt$$

对于 $\operatorname{Re}\mu>0$, z 不在实軸的 -1 与 1 之間时有效, 它可以从 3-6(3) 及 2-1(7) 中得到証明. 在証明中出現的積分 $\int_1^z(t-1)^n(z-t)^{\mu-1}\,dt$, 可以这样來計値: 作代换 $t=v(z-1)+1$, 应用 1-5(1) 則这个積分就为

$$(z-1)^{n+\mu}\Gamma(n-1)\Gamma(\mu)/\Gamma(n+1+\mu).$$

同样,应用 3-6(3), 1-5(13) 及 3-4(5) 可得

(30) $$\Gamma(\mu)P_\nu^{-\mu}(x)=(1-x^2)^{-\mu/2}\int_x^1 P_\nu(t)(t-x)^{\mu-1}dt,\quad \mathrm{Re}\,\mu>0.$$

同样可用 3-2(5), 1-5(2) 及代换 $t=vz+z$, 得

(31) $$\Gamma(\mu)Q_\nu^{-\mu}(z)=e^{-\mu\pi i}(z^2-1)^{-\mu/2}\int_z^\infty Q_\nu(t)(t-z)^{\mu-1}dt$$

$$|z|>1,\ \mathrm{Re}\,\mu>0,\ \mathrm{Re}\,(\nu-\mu+1)>0.$$

又从 3-2(45), 2-12(15) 式可得

(32) $$\Gamma(\tfrac{1}{2}-\mu)Q_\nu^\mu(z)=e^{i\mu\pi}2^\mu\pi^{\frac{1}{2}}(z^2-1)^{\mu/2}[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]^{-\nu-\frac{1}{2}}$$
$$\times\int_0^\infty e^{-(\nu+\mu+1)t}\{(1-e^{-t})[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}-ze^{-t}$$
$$+(z^2-1)e^{-t}]\}dt\qquad \mathrm{Re}\,\mu<\tfrac{1}{2},\ \mathrm{Re}\,(\nu+\mu+1)>0.$$

应用 3-3(9), 3-4(2) 及 3-4(8) 分别可得 $P_\nu^\mu(z)$, $Q_\nu^\mu(\cos\theta)$ 及 $P_\nu^\mu(\cos\theta)$ 的对应表达式.

公式

(33) $$P_\nu^\mu(z)=\frac{2^\mu\Gamma(1-2\mu)(z^2-1)^{-\mu/2}}{\Gamma(1-\mu)\Gamma(-\mu-\nu)\Gamma(\nu-\mu+1)}$$
$$\times\int_0^\infty(1+2tz+t^2)^{\mu-\frac{1}{2}}t^{-1-\nu-\mu}dt$$

$$\mathrm{Re}\,(\mu+\nu)<0,\ \mathrm{Re}\,(\mu-\nu)<1,\ |\arg(z\pm1)|<\pi.$$

可以这样來証明: 先寫出 $1+2tz+t^2=(1+t)^2[1-2t(1+t)^{-2}\times(1-z)]$, 將被積式展为級数,逐項積分而后運用 1-5(12), 2-1(2) 及 3-2(7) 式. 將勒上特函数表示为迴綫積分的式子可參看霍勃生, 1931, pp, 183–200, 236–243, 266.

3-8. 鄰接勒上特函数間的关系

勒上特函数的遞推公式可以引用 2-8 節中鄰接超比函数間的高斯关系來導出. 因此,从公式 3-2(14) 及 2-8(30) 可得

(1) $$P_\nu^{\mu+2}(z)+2(\mu+1)z(z^2-1)^{-\frac{1}{2}}P_\nu^{\mu+1}(z)$$
$$=(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)P_\nu^\mu(z)$$

由 3-2(28) 及 2-8(28) 可得

(2) $$(2\nu+1)zP_\nu^\mu(z)=(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(z)+(\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(z)$$

由 3-2(24) 及 3-2(4) 可得

(3)　$P^{\mu}_{\nu-1}(z)-P^{\mu}_{\nu+1}(z)=-(2\nu+1)(z^2-1)^{\frac{1}{2}}P^{\mu-1}_{\nu}(z).$

下面的公式可从(1)至(3)式中導出:

(4)　$(\nu-\mu)(\nu-\mu+1)P^{\mu}_{\nu+1}(z)-(\nu+\mu)(\nu+\mu+1)P^{\mu}_{\nu-1}(z)$
$=(2\nu+1)(z^2-1)^{\frac{1}{2}}P^{\mu+1}_{\nu}(z),$

(5)　$P^{\mu}_{\nu-1}(z)-zP^{\mu}_{\nu}(z)=-(\nu-\mu+1)(z^2-1)^{\frac{1}{2}}P^{\mu-1}_{\nu}(z),$

(6)　$zP^{\mu}_{\nu}(z)-P^{\mu}_{\nu+1}(z)=-(\nu+\mu)(z^2-1)^{\frac{1}{2}}P^{\mu-1}_{\nu}(z),$

(7)　$(\nu-\mu)zP^{\mu}_{\nu}(z)-(\nu+\mu)P^{\mu}_{\nu-1}(z)=(z^2-1)^{\frac{1}{2}}P^{\mu+1}_{\nu}(z),$

(8)　$(\nu-\mu+1)P^{\mu}_{\nu+1}(z)-(\nu+\mu+1)zP^{\mu}_{\nu}(z)=(z^2-1)^{\frac{1}{2}}P^{\mu+1}_{\nu}(z).$

將 3-2(7) 式微分,并引用 2-1(7), 得

(9)　$\dfrac{dP^{\mu}_{\nu}(z)}{dz}=(\nu+\mu)(\nu-\mu+1)(z^2-1)^{-\frac{1}{2}}P^{\mu-1}_{\nu}(z)-\dfrac{\mu z}{z^2-1}P^{\mu}_{\nu}(z).$

用公式(6)来消去 $P^{\mu-1}_{\nu}(z)$, 得

(10)　$(z^2-1)\dfrac{dP^{\mu}_{\nu}(z)}{dz}=(\nu-\mu+1)P^{\mu}_{\nu+1}(z)-(\nu+1)zP^{\mu}_{\nu}(z)$
$=\nu zP^{\mu}_{\nu}(z)-(\nu+\mu)P^{\mu}_{\nu-1}(z).$

容易証明公式(1)至(10)对 $Q^{\mu}_{\nu}(z)$ 也有效.

以 $P^{\mu}_{\nu}(x+i0)=e^{-\frac{1}{2}i\mu\pi}P^{\mu}_{\nu}(x)$, 可得如下的勒让特函数在剖割上的遞推关系式:

(11)　$P^{\mu+2}_{\nu}(x)+2(\mu+1)x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}P^{\mu+1}_{\nu}(x)$
$+(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)P^{\mu}_{\nu}(x)=0,$

(12)　$(2\nu+1)xP^{\mu}_{\nu}(x)=(\nu-\mu+1)P^{\mu}_{\nu+1}(x)+(\nu+\mu)P^{\mu}_{\nu-1}(x),$

(13)　$P^{\mu}_{\nu-1}(x)-P^{\mu}_{\nu+1}(x)=(2\nu+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P^{\mu-1}_{\nu}(x),$

(14)　$(\nu-\mu)(\nu-\mu+1)P^{\mu}_{\nu+1}(x)-(\nu+\mu)(\nu+\mu+1)P^{\mu}_{\nu-1}(x)$
$=(2\nu+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P^{\mu+1}_{\nu}(x),$

(15)　$P^{\mu}_{\nu-1}(x)-xP^{\mu}_{\nu}(x)=(\nu-\mu+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P^{\mu-1}_{\nu}(x),$

(16)　$xP^{\mu}_{\nu}(x)-P^{\mu}_{\nu+1}(x)=(\nu+\mu)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P^{\mu-1}_{\nu}(x),$

(17)　$(\nu-\mu)xP^{\mu}_{\nu}(x)-(\nu+\mu)P^{\mu}_{\nu-1}(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P^{\mu+1}_{\nu}(x),$

(18)　$(\nu-\mu+1)P^{\mu}_{\nu+1}(x)-(\nu+\mu+1)xP^{\mu}_{\nu}(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P^{\mu+1}_{\nu}(x),$

(19)　$(1-x^2)\dfrac{dP^{\mu}_{\nu}(x)}{dx}=(\nu+1)xP^{\mu}_{\nu}(x)-(\nu-\mu+1)P^{\mu}_{\nu+1}(x)$
$=-\nu xP^{\mu}_{\nu}(x)+(\nu+\mu)P^{\mu}_{\nu-1}(x).$

这里还是可以証明上面的(11)至(19)式对于 $Q^{\mu}_{\nu}(x)$ 也正确.

由(2)可得克列司托費耳第一及第二求和公式。

(20) $$(\zeta-z)\sum_{m=0}^{n}(2m+1)P_m(z)P_m(\zeta)$$
$$=(n+1)[P_{n+1}(\zeta)P_n(z)-P_n(\zeta)P_{n+1}(z)],$$

(22) $$(\zeta-z)\sum_{m=0}^{n}(2m+1)P_m(z)Q_m(\zeta)$$
$$=1-(n+1)[P_{n+1}(z)Q_n(\zeta)-P_n(z)Q_{n+1}(\zeta)]$$

3-9-1. 漸近展开式

对于大的正 $\mathrm{Re}\, c$, 超比級数 $F(a, b; c; z)$ 是 c 的一个漸近展开式,卽使級数本身并不收斂,但只要 z 不是 >1 的实数,情形都如此. 因此, 对于固定的 z 及 ν, 以及 $\mathrm{Re}\,\mu\to\infty$, 則 3-3(17), 3-3(16), 3-2(3) 及 3-3(15) 就分别是 $P_\nu^\mu(z)$, $Q_\nu^\mu(z)$, $P_\nu^{-\mu}(z)$, $Q_\nu^{-\mu}(z)$ 的漸近展开式. 第一,第二,及第四个展开式对于所有实軸上 $-\infty$ 与 -1 及 $+\infty$ 与 $+1$ 之間的点的 z 都適合,而 3-2(3) 式則对于不在实軸的 $-\infty$ 与 -1 之間的 z 都適合.

对于固定的 z 及 μ, 以及 $\mathrm{Re}\,\nu\to\infty$, 公式 3-3(21), 3-2(44), 3-3(21) 速同 3-3(1) 及 3-3(22) 分别是 $P_\nu^\mu(z)$, $Q_\nu^\mu(z)$, $P_{-\nu}^\mu(z)$ 及 $Q_{-\nu}^\mu(z)$ 的漸近展开式. 第一,第三,及第四式对所有实軸上 $-\infty$ 与 -1 及 $+\infty$ 与 $+1$ 之間的 z 都適合, 3-2(44) 对所有不在实軸的 $-\infty$ 与 $+1$ 之間的 z 都適合.

公式 3-5(5) 及 3-5(6) 分别是 $P_\nu^\mu(\cos\theta)$ 及 $Q_\nu^\mu(\cos\theta)$ 的 ν 的漸近展开式,当 $\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$, $\varepsilon>0$ 时有效.

从而可得

(1) $$Q_\nu^\mu(\cos\theta)=\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}\left(\frac{\pi}{2\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\{\cos[(\nu+\tfrac{1}{2})\theta+\pi/4+\tfrac{1}{2}\mu\pi]+O(\nu^{-1})\},$$

(2) $$P_\nu^\mu(\cos\theta)=\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}(\tfrac{1}{2}\pi\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times\{\cos[(\nu+\tfrac{1}{2})\theta-\pi/4+\tfrac{1}{2}\mu\pi]+O(\nu^{-1})\},$$
$$\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon,\ \varepsilon>0.$$

对于小的 θ 值,可参看 3-5(10). 公式 3-5(9) 是 $P_\nu^{-\mu}(\cos\theta)$ 的 μ 的漸近展开式.

3-9-2. 勒让特函数邻近奇点的性态

在1上的性态

	函数	限制条件	首项
(3)	$P_\nu^\mu(z)$	$\mu\neq 1, 2, 3, \cdots$	$2^{\mu/2}(z-1)^{-\mu/2}/\Gamma(1-\mu)$
(4)	$P_\nu^m(z)$	$m=0, 1, 2, \cdots$	$\dfrac{2^{-1/2m}\Gamma(\nu+m+1)(z-1)^{1/2m}}{m!\Gamma(\nu-m+1)}$
(5)	$Q_\nu^\mu(z)e^{-i\mu\pi}$	$\mathrm{Re}\,\mu>0,$	$2^{\mu/2-1}\Gamma(\mu)(z-1)^{-\mu/2}$
(6)	$Q_\nu^\mu(z)e^{-i\pi\mu}$	$\mathrm{Re}\,\mu<0,$	$\dfrac{2^{-\mu/2-1}\Gamma(-\mu)\Gamma(\nu+\mu+1)(z-1)^{\mu/2}}{\Gamma(\nu-\mu+1)}$
(7)	$Q_\nu(z)$	$\nu\neq -1, -2, -3, \cdots$	$-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}\right)-\gamma-\psi(\nu+1)$
(8)	$P_\nu^\mu(x)$	$\mu\neq 1, 2, 3, \cdots$	$2^{\mu/2}(1-x)^{-\mu/2}/\Gamma(1-\mu)$
(9)	$P_\nu^m(x)$	$m=0, 1, 2, \cdots$	$\dfrac{(-1)^m 2^{-1/2m}\Gamma(\nu+m+1)(1-x)^{1/2m}}{m!\,\Gamma(\nu-m+1)}$
(10)	$Q_\nu^\mu(x)$	$\mathrm{Re}\,\mu>0$	$2^{\mu/2-1}\Gamma(\mu)\cos(\mu\pi)(1-x)^{-\mu/2}$
(11)	$Q_\nu^\mu(x)$	$\mathrm{Re}\,\mu<0$	$\dfrac{2^{-\mu/2-1}\Gamma(-\mu)\Gamma(\nu+\mu+1)(1-x)^{\mu/2}}{\Gamma(\nu-\mu+1)}$
(12)	$Q_\nu(x)$	$\nu\neq -1, -2, -3, \cdots$	$-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)-\gamma-\psi(\nu+1)$

在 −1 上的性态

	函数	限制条件	首　项
(13)	$P_\nu^\mu(x)$	$\mathrm{Re}\,\mu>0$	$-2^{\mu/2}\sin(\pi\nu)\Gamma(\mu)\pi^{-1}(1+x)^{-\mu/2}$
(14)	$P_\nu^\mu(x)$	$\mathrm{Re}\,\mu<0$	$\dfrac{2^{-\mu/2}\Gamma(-\mu)(1+x)^{\mu/2}}{\Gamma(1+\nu-\mu)\Gamma(-\nu-\mu)}$
(15)	$P_\nu(x)$	無	$\pi^{-1}\sin(\nu\pi)[\ln(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x)+\gamma+2\psi(\nu+1)+\pi\cot(\nu\pi)]$
(16)	$Q_\nu^\mu(x)$	$\mathrm{Re}\,\mu>0$	$-2^{\mu/2-1}\Gamma(\mu)\cos(\nu\pi)(1+x)^{-\mu/2}$
(17)	$Q_\nu^\mu(x)$	$\mathrm{Re}\,\mu<0$	$\dfrac{-2^{-\mu/2-1}\cos[\pi(\nu+\mu)]\Gamma(-\mu)\Gamma(\nu+\mu+1)(1+x)^{\mu/2}}{\Gamma(\nu-\mu+1)}$
(18)	$Q_\nu(x)$	$\nu\neq-1,\ -2,\ -3,\ \cdots$	$\frac{1}{2}\cos(\nu\pi)[\ln(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x)+\gamma+2\psi(\nu+1)-\pi\tan(\nu\pi)]$

在 ∞ 上的性态

	函数	限制条件	首　项
(19)	$P_\nu^\mu(z)$	$\mathrm{Re}\,\nu>-\frac{1}{2}$	$2^\nu\pi^{-1/2}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})z^\nu/\Gamma(1+\nu-\mu)$
(20)	$P_\nu^\mu(z)$	$\mathrm{Re}\,\nu<-\frac{1}{2}$	$\pi^{-1/2}2^{-\nu-1}\Gamma(-\nu-\frac{1}{2})z^{-\nu-1}/\Gamma(-\nu-\mu)$
(21)	$Q_\nu^\mu(z)$		$e^{i\mu\pi}2^{-\nu-1}\pi^{1/2}\Gamma(\nu+\mu+1)z^{-\nu-1}/\Gamma(\nu+3/2)$

勒让特函数在奇点 1, -1, 或 ∞ 之一的鄰域中的性态可以用 3-2, 3-4, 及 3-6 節的展开式來研究. 其結果連同应加的限制条件列于上面的表中. 有关这些結果的來源說明在本節下面. 例如: 方程 (3) 表示在 $z=1$ 的鄰域内, 函数 $P^{\mu}(z)$ 等于 $[2^{\mu/2}(z-1)^{-\mu/2}/\Gamma(1-\mu)]+(z-1)$ 的高階項, 其限制条件为 μ 不是正整数. 这个結果系从 3-2(3) 式導出.

方程	从那一式導出
(3)	3-2(3)
(4)	3-6(1)
(5)	3-2(32)
(6)	3-2(32)
(7)	3-2(36) 及 2-10(14)
(8)	3-4(6)
(9)	3-6(2)
(10)	3-4(10)
(11)	3-4(10)
(12)	(7), 3-4(2) 及 3-2(12)
(13)	3-4(14), (8) 及 (10)
(14)	3-4(14), (8) 及 (11)
(15)	3-4(14), (8) 及 (12)
(16)	3-4(15), (10) 及 (8)
(17)	3-4(15), (11), 及 (8)
(18)	3-4(15), (12) 及 (8)
(19)	3-2(18)
(20)	3-2(18)
(21)	3-2(5)

3-10. 以勒让特函数表示的展开式

有几个勒让特函数的積分式具有富里哀系数的形式, 因而可以用來求某些富里哀級数的和.

对于固定的 θ, $0<\theta<\pi$, 令

$$f(v)=\begin{cases}(\cos v-\cos\theta)^{-\mu-\frac{1}{2}}, & 0\leqslant v<\theta \text{ 或 } 2\pi-\theta<v\leqslant 2\pi,\\ 0 & \theta<v<2\pi-\theta.\end{cases}$$

$f(v)$的富里哀級数可以由 3-7(27)式組成. 这就建立了下面的展开式:

(1) $$\Gamma(\tfrac{1}{2}-\mu)\left[P^{\mu}_{-\frac{1}{2}}(\cos\theta)+2\sum_{n=1}^{\infty}P^{\mu}_{n-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\cos(nv)\right]$$
$$=\begin{cases}(2\pi)^{\frac{1}{2}}(\sin\theta)^{\mu}(\cos v-\cos\theta)^{-\mu-\frac{1}{2}} & 0\leqslant v<\theta,\\ 0 & \theta<v<\pi,\end{cases}$$
$$0<\theta<\pi,\ \mathrm{Re}\,\mu<\tfrac{1}{2}.$$

因此, 以 $\pi-\theta$ 代 v, $\pi-v$ 代 θ, 可得

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}-\mu)\left[P^{\mu}_{-\frac{1}{2}}(-\cos v)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}P^{\mu}_{n-\frac{1}{2}}(-\cos v)\cos(n\theta)\right]$$
$$=\begin{cases}(2\pi)^{\frac{1}{2}}(\sin v)^{\mu}(\cos v-\cos\theta)^{-\mu-\frac{1}{2}} & v<\theta<\pi,\\ 0 & 0<\theta<v,\end{cases}$$
$$0<v<\pi,\ \mathrm{Re}\,\mu<\tfrac{1}{2}.$$

同理, 由 3-7(27) 可得

(2) $$\Gamma(\tfrac{1}{2}-\mu)\sum_{n=0}^{\infty}P^{\mu}_{n}(\cos\theta)\cos(n+\tfrac{1}{2})v$$
$$=\begin{cases}(\tfrac{1}{2}\pi)^{\frac{1}{2}}(\sin\theta)^{\mu}(\cos v-\cos\theta)^{-\mu-\frac{1}{2}} & 0\leqslant v<\theta,\\ 0 & \theta<v<\pi,\end{cases}$$
$$0<\theta<\pi,\ \mathrm{Re}\,\mu<\tfrac{1}{2}.$$

如果我們將 $(z-\cos v)^{-\mu-\frac{1}{2}}$ 展开为富里哀級数(z 固定且不在实軸的 -1 与 1 之間), 并利用 3-7(10), 得:

(3) $$Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}}(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}Q^{\mu}_{n-\frac{1}{2}}(z)\cos(nv)$$
$$=e^{i\mu\pi}(\tfrac{1}{2}\pi)^{\frac{1}{2}}\Gamma(\mu+\tfrac{1}{2})(z^{2}-1)^{\mu/2}(z-\cos v)^{-\mu-\frac{1}{2}},$$
$$\mathrm{Re}\,\mu>-\tfrac{1}{2},$$

z 不在实軸的 -1 与 1 之間.

此外, 由 3-7(16) 得

(4) $$P_{\nu}(z)+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}P^{m}_{\nu}(z)\cos[m(v-\phi)]$$
$$=[z+(z^{2}-1)^{\frac{1}{2}}\cos(v-\phi)]^{\nu}\qquad \mathrm{Re}\,z>0.$$

因此，令 $\phi=0$，并以 $-\nu-1$ 代 ν，应用 3-3(1) 及 1-2(3) 得

$$(5)\quad P_\nu(z)+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+1)}P_\nu^m(z)\cos(mv)$$
$$=[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos v]^{-\nu-1}\qquad \mathrm{Re}\,z>0.$$

下面是道格耳展开式

$$(6)\quad P_\nu^{-\mu}(\cos\theta)=\frac{\sin(\nu\pi)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\nu-n}-\frac{1}{\nu+n+1}\right)P_n^{-\mu}(\cos\theta)$$
$$-\pi<\theta<\pi,\ \mu\geqslant 0.$$

它可以証明如下．先取公式

$$(7)\quad \cos[(\nu+\tfrac{1}{2})v]=\frac{\sin(\nu\pi)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\nu-n}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\nu+n+1}\right)\cos[(n+\tfrac{1}{2})v]\qquad -\pi<v<\pi,$$

这个公式是这样建立的：計算圍綫積分

$$\int[(z-v)\sin(\pi z)]^{-1}\cos[(z+\tfrac{1}{2})v]\,dz,$$

積分圍道为一个圓，圓心在原点，半徑 $(N+\frac{1}{2})\pi$（N 是有限整数）．引用柯西定理并使 $N\to\infty$ 即可得公式 (7)．將 (7) 代入 3-7(27)，逐項積分，并以 $-\mu$ 代 μ，即得公式 (6)．

又从 3-7(27) 得

$$P_\nu^{-\mu}(\cos\theta)P_\nu^{-\lambda}(\cos\theta')$$
$$=(\tfrac{1}{2}\pi)^{-1}\frac{(\sin\theta)^{-\mu}}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\int_0^{\theta}\cos[(\nu+\tfrac{1}{2})v](\cos v-\cos\theta)^{\mu-\frac{1}{2}}dv$$
$$\times\frac{(\sin\theta')^{-\lambda}}{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}\int_0^{\theta'}\cos[(\nu+\tfrac{1}{2})\phi](\cos\phi-\cos\theta')^{\lambda-\frac{1}{2}}d\phi.$$

再应用 (7) 并逐項積分，得

$$(8)\quad P_\nu^{-\mu}(\cos\theta)P_\nu^{-\lambda}(\cos\theta')=\frac{\sin(\nu\pi)}{\pi}$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\nu-n}-\frac{1}{\nu+n+1}\right)P_n^{-\mu}(\cos\theta)P_n^{-\lambda}(\cos\theta')$$
$$-\pi<\theta+\theta'<\pi,\ -\pi<\theta-\theta'<\pi,\ \mu\geqslant 0,\ \lambda\geqslant 0.$$

此外，在 (8) 式中令 $\mu=0$，$\lambda=m$（m 为正整数）并对 x 微分 m 次，应用 3-6(6)，得



(9) $\dot{P}_\nu^m(x)P_\nu^{-m}(x')$

$$=\frac{\sin(\nu\pi)}{\pi}\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{1}{\nu-n}-\frac{1}{\nu+n+1}\right)P_n^m(x)P_n^{-m}(x')$$

$$0<\theta<\pi,\ 0<\theta'<\pi,\ \theta+\theta'<\pi,\ x=\cos\theta,\ x'=\cos\theta'.$$

(类似的展开式可参看麦克罗勃特的著作，1934).

从 $P_n(z')$ 及 $Q_n(z)$ 的漸近展开式 3-3(21) 及 3-2(44) 中可知只要

$$|z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}|<|\zeta+(\zeta^2-1)^{\frac{1}{2}}|,$$

则 3-8(21) 式的右边部分在 $n\to\infty$ 时將趋近于 1，因而得希英公式

(10) $$(\zeta-z)^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)P_m(z)Q_m(\zeta)$$

其余的很多公式可見 Dougall, 1919; Darling, 1923; Prasad, 1930, pp. 64–47; 159; 1931; Shabde, 1931, 1932, 1933; Banerjee, 1932; Mac Robert, 1934, 1935, 1936.

3-11. 加法定理

关系式

(1) $$P_\nu[zz'-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}(z'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\psi]=P_\nu(z)P_\nu(z')$$
$$+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}P_\nu^m(z)P_\nu^m(z')\cos(m\psi)$$

$$\mathrm{Re}\,z>0,\ \mathrm{Re}\,z'>0,\ |\arg(z-1)|<\pi,\ |\arg(z'-1)|<\pi.$$

可以証明如下．从 3-10(4), 3-10(5)及巴塞凡耳定理(Titchmarsh, 1932, p. 421) 可知級数

$$2P_\nu(z)P_\nu(z')+4\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m)}P_\nu^m(z)P_\nu^m(z')\cos(m\psi)$$

收斂为

$$(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi}[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\phi-\psi)]^\nu[z'+(z'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\phi]^{-\nu-1}d\phi,$$

后面一式等于

$$2P_\nu[zz'-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}(z'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\psi]$$

由 3-7(18) 式就可得出公式(1).

此外(見 Hobson, 1931, p. 371) 由 3-4(14) 式可得

(2) $$P_\nu(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\psi)$$
$$=P_\nu(\cos\theta)P_\nu(\cos\theta')+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m P_\nu^{-m}(\cos\theta)P_\nu^m(\cos\theta')\cos(m\psi)$$
$$=P_\nu(\cos\theta)P_\nu(\cos\theta')+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}P_\nu^m(\cos\theta)P_\nu^m(\cos\theta')\cos(m\psi)$$
$$0\leqslant\theta<\pi,\ 0\leqslant\theta'<\pi,\ \theta+\theta'<\pi,\ \psi \text{ 实数}.$$

因而,从 3-4(14) 式可得

(3) $$Q_\nu(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\psi)$$
$$=P_\nu(\cos\theta')Q_\nu(\cos\theta)+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m P_\nu^{-m}(\cos\theta'))Q_\nu^m(\cos\theta)\cos(m\psi)$$
$$=P_\nu(\cos\theta')Q_\nu(\cos\theta)+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}P_\nu^m(\cos\theta')Q_\nu^m(\cos\theta)\cos(m\psi)$$
$$0<\theta\leqslant\pi/2,\ 0<\theta'<\pi,\ 0\leqslant\theta+\theta'<\pi,\ \psi \text{ 实数}.$$

从(1)及 3-3(11) 得

(4) $$Q_\nu[tt'-(t^2-1)^{\frac{1}{2}}(t'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\psi]$$
$$=Q_\nu(t)P_\nu(t')+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m Q_\nu^m(t)P_\nu^{-m}(t')\cos(m\psi)$$
$$t,\ t' \text{ 实数},\ 1<t'<t,\ \nu\neq-1,\ -2,\ -3,\ \cdots,\ \psi \text{ 实数}.$$

(类似的公式可参看戈林, 1940, 的著作, p. 222).

3-12. 包含勒上特函数的積分式

設 $W_\nu^\mu(z)$ 及 $W_\sigma^\rho(z)$ 代表勒上特微分方程 3-2(1) 的任意解, 其参数分别为 ν, μ 及 σ, ρ, 则从 3-2(1), 3-8(10) 及 3-8(19) 可知

(1) $\displaystyle\int_a^b[(\nu-\sigma)(\nu+\sigma+1)+(\rho^2-\mu^2)(1-z^2)^{-1}]w_\nu^\mu w_\sigma^\rho\,dz$

$$=\left[(1-z^2)\left(w_\nu^\mu\frac{d}{dz}w_\sigma^\rho-w_\sigma^\rho\frac{d}{dz}w_\nu^\mu\right)\right]_a^b$$

$$=[z(\nu-\sigma)w_\nu^\mu w_\sigma^\rho+(\sigma+\rho)w_\nu^\mu w_{\sigma-1}^\rho-(\nu+\mu)w_{\nu-1}^\mu w_\sigma^\rho]_a^b$$

当 $\mu=\rho=0$, 则由(1)及 3-8(7) 得

(2) $\displaystyle\int_a^b w_\nu w_\sigma\,dz=[(\nu-\sigma)(\nu+\sigma+1)]^{-1}[(z^2-1)^{\frac{1}{2}}(w_\sigma w_\nu^1-w_\nu w_\sigma^1)]_a^b$

如果 w_ν 及 w_σ 代表剖割上的勒上特函数，則由(1)及 3-8(17) 得

(3) $\displaystyle\int_a^b \mathrm{w}_\nu\mathrm{w}_\sigma\,dx$

$$=[(\nu-\sigma)(\nu+\sigma+1)]^{-1}[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(\mathrm{w}_\sigma\mathrm{w}_\nu^1-\mathrm{w}_\nu\mathrm{w}_\sigma^1)]_a^b$$

下面一些結果利用 3 9-2 節公式很容易从(2)及(3)式中証明.

(4) $\displaystyle\int_1^\infty P_\nu(x)Q_\sigma(x)\,dx=[(\sigma-\nu)(\sigma+\nu+1)]^{-1}$　　$\operatorname{Re}\sigma>\operatorname{Re}\nu>0$,

(5) $\displaystyle\int_1^\infty Q_\nu(x)Q_\sigma(x)\,dx=[(\sigma-\nu)(\sigma+\nu+1)]^{-1}[\psi(\sigma+1)-\psi(\nu+1)]$

$\operatorname{Re}(\sigma+\nu)>-1,\ \sigma+\nu+1\neq0,\ \nu,\ \sigma\neq-1,\ -2,\ -3,\ \cdots$,

(6) $\displaystyle\int_1^\infty [Q_\nu(x)]^2\,dx=(2\nu+1)^{-1}\psi'(\nu+1)$　　$\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$,

(7) $\displaystyle\int_{-1}^1 P_\nu(x)P_\sigma(x)\,dx=2\pi^{-2}[(\sigma-\nu)(\sigma+\nu+1)]^{-1}$

$$\times\{2\sin(\pi\nu)\sin(\pi\sigma)[\psi(\nu+1)-\psi(\sigma+1)]$$

$$+\pi\sin(\pi\sigma-\pi\nu)\}\qquad \sigma+\nu+1\neq0,$$

在 $\nu=n$, $\sigma=m$ 的特殊情况下(n, m 整数),

(8) $\displaystyle\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)\,dx=0$,

(9) $\displaystyle\int_{-1}^1 [P_\nu(x)]^2\,dx=\pi^{-2}(\nu+\tfrac{1}{2})^{-1}[\pi^2-2(\sin\pi\nu)^2+\psi'(\nu+1)]$,

(10) $\displaystyle\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2\,dx=(n+\tfrac{1}{2})^{-1}$　　$n=0,1,2,\cdots$

(11) $$\int_{-1}^{1} Q_\nu(x)Q_\sigma(x)dx=[(\sigma-\nu)(\sigma+\nu+1)]^{-1}$$
$$\times\{[\psi(\nu+1)-\psi(\sigma+1)][1+\cos(\sigma\pi)\cos(\nu\pi)]$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi\sin(\nu\pi-\sigma\pi)\}$$
$$\sigma+\nu+1\neq 0,\ \nu,\ \sigma\neq -1,\ -2,\ -3,\ \cdots.$$

(12) $$\int_{-1}^{1}[Q_\nu(x)]^2dx=(2\nu+1)^{-1}\{\tfrac{1}{2}\pi^2-\psi'(\nu+1)[1+(\cos\nu\pi)^2]\}$$
$$\nu\neq -1,\ -2,\ -3,\ \cdots$$

(13) $$\int_{-1}^{1}P_\nu(x)Q_\sigma(x)\,dx=[(\nu-\sigma)(\nu+\sigma+1)]^{-1}$$
$$\times[1-\cos(\sigma\pi-\nu\pi)-2\pi^{-1}\sin(\pi\nu)\cos(\pi\sigma)[\psi(\nu+1)$$
$$-\psi(\sigma+1)]\}\qquad \mathrm{Re}\,\nu>0,\ \mathrm{Re}\,\sigma>0,\ \sigma\neq\nu,$$

(14) $$\int_{-1}^{1}P_\nu(x)Q_\nu(x)\,dx=-\pi^{-1}(2\nu+1)^{-1}\sin(2\nu\pi)\psi'(\nu+1)$$
$$\mathrm{Re}\,\nu>0,$$

(15) $$\int_{0}^{1}P_\nu(x)P_\sigma(x)\,dx=2\pi^{-1}[(\sigma-\nu)(\sigma+\nu+1)]^{-1}$$
$$\times[A\sin(\tfrac{1}{2}\sigma\pi)\cos(\tfrac{1}{2}\nu\pi)-A^{-1}\sin(\tfrac{1}{2}\nu\pi)\cos(\tfrac{1}{2}\sigma\pi)],$$

(16) $$\int_{0}^{1}Q_\nu(x)Q_\sigma(x)dx=[(\sigma-\nu)(\sigma+\nu+1)]^{-1}\{\psi(\nu+1)-\psi(\sigma-1)$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi[(A-A^{-1})\sin(\tfrac{1}{2}\sigma\pi+\tfrac{1}{2}\nu\pi)$$
$$-(A+A^{-1})\sin(\tfrac{1}{2}\sigma\pi-\tfrac{1}{2}\nu\pi)]\}\qquad \mathrm{Re}\,\nu>0,\ \mathrm{Re}\,\sigma>0.$$

(17) $$\int_{0}^{1}P_\nu(x)Q_\sigma(x)\,dx=[(\sigma-\nu)(\sigma+\nu+1)]^{-1}$$
$$\times[A^{-1}\cos(\tfrac{1}{2}\nu\pi-\tfrac{1}{2}\sigma\pi)-1]\qquad \mathrm{Re}\,\sigma>0,\ \mathrm{Re}\,\nu>0.$$

在(15)至(17)式中
$$A=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu)\Gamma(1+\frac{1}{2}\sigma)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sigma)\Gamma(1+\frac{1}{2}\nu)}$$

如果(1)式中 $\mu=\rho=m,\ \nu=n,\ \sigma=l$，($l,\ m,\ n$ 皆为正整数)，则由 3-9(8)，3-9(10)，3-4(19) 可得

(18) $$\int_{-1}^{1}Q_n^m(x)P_l^m(x)\,dx=(-1)^m\frac{1-(-1)^{l+n}(n+m)!}{(l-n)(l+n+1)(n-m)!}.$$

同样，如 l, m, n, k 是非負整数，由(1)可得

$$(19)\quad \int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_l^m(x)\,dx = 0, \qquad l \neq n,$$

$$(20)\quad \int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_n^k(x)(1-x^2)^{-1}\,dx = 0, \qquad k \neq m,$$

$$(21)\quad \int_{-1}^{1} [P_n^m(x)]^2\,dx = (n+\tfrac{1}{2})^{-1}(n+m)!/(n-m)!,$$

$$(22)\quad \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1}[P_n^m(x)]^2\,dx = (n+m)!/[m(n-m)!].$$

此外

$$(23)\quad \int_{0}^{1} P_\nu(x) x^\sigma\,dx = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} 2^{-\sigma-1} \Gamma(1+\sigma)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}\sigma-\frac{1}{2}\nu)\Gamma(\frac{1}{2}\sigma+\frac{1}{2}\nu+3/2)}$$

$$Re\,\sigma > -1.$$

这个公式可这样来証明：將 3-2(3) 及 2-1(2) 代入，并逐項積分．应用 1-5(1) 及 2-1(23) 先得

$$\int_{0}^{1} P_\nu(x) x^\sigma\,dx = (\sigma+1)^{-1} F(-\nu, \nu+1; \sigma+2; \tfrac{1}{2})$$

$$= 2^{-\sigma-1}(\sigma+1)^{-1} F(\sigma+\nu+2, \sigma-\nu+1; \sigma+2; \tfrac{1}{2})$$

引用 2-8(50) 立即可得(23)式

巴尼斯 (1908, pp. 183 ff.) 曾証明

$$(24)\quad \int_{0}^{1} x^\sigma (1-x^2)^{-\mu/2} P_\nu^\mu(x)\,dx$$

$$= \frac{2^{\mu-1}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sigma)\Gamma(1+\frac{1}{2}\sigma)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}\sigma-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)\Gamma(\frac{1}{2}\sigma+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu+3/2)}$$

$$\mathrm{Re}\,\mu < 1,\ \mathrm{Re}\,\sigma > -1,$$

$$(25)\quad (-1)^m 2^{m+1} \Gamma(1-m+\nu) \int_{0}^{1} x^\sigma (1-x^2)^{m/2} P_\nu^m(x)\,dx$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sigma)\Gamma(1+\frac{1}{2}\sigma)\Gamma(1+m+\nu)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}\sigma+\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\nu)\Gamma(3/2+\frac{1}{2}\sigma+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\nu)}$$

$\mathrm{Re}\,\sigma > -1$, m 正整数．

$$(26)\quad \int_{0}^{1} (1-x^2)^{-1}[P_\nu^\mu(x)]^2\,dx = -\Gamma(1+\mu+\nu)/[2\mu\Gamma(1-\mu+\nu)]$$

$\mathrm{Re}\,\mu < 0$, $\nu+\mu$ 为正整数．

另外一些包含勒让特及三角函数的积分式为(Mac Robert, 1940, p. 95, 96; 1947, p. 366, 367):

$$(27)\quad \int_0^{\pi} (\sin t)^{\alpha-1} P_\nu^{-\mu}(\cos t)\, dt$$
$$= \frac{2^{-\mu}\pi\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\mu)\Gamma(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\nu)\Gamma(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\nu)\Gamma(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+1)\Gamma(\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2})}$$
$$\mathrm{Re}\,(\alpha\pm\mu)>0,$$

$$(28)\quad \int_0^{\infty} (\mathrm{sh}\, t)^{\alpha-1} P_\nu^{-\mu}(\mathrm{ch}\, t)\, dt$$
$$= \frac{2^{-1-\mu}\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\mu)\Gamma(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\alpha+1)\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\nu)}{\Gamma(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+1)\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu)\Gamma(1+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\alpha)}$$
$$\mathrm{Re}\,(\alpha+\mu)>0,\ \mathrm{Re}\,(\nu-\alpha+2)>0,\ \mathrm{Re}\,(1-\alpha-\nu)>0,$$

$$(29)\quad \Gamma(1+\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}\mu)\Gamma(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\alpha)\int_0^{\infty} (\mathrm{sh}\, t)^{\alpha-1} Q_\nu^{\mu}(\mathrm{ch}\, t)\, dt$$
$$= e^{i\mu\pi}2^{\mu-\alpha}\Gamma(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\mu)\Gamma(1+\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}\alpha)\Gamma(\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\mu)$$
$$\times\Gamma(\tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{1}{2}\mu)\qquad \mathrm{Re}\,(\alpha\pm\mu)>0,\ \mathrm{Re}\,(\nu-\alpha+2)>0.$$

此外(Shabde, 1945, p. 51) 倘有

$$(30)\quad [\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)]^2\int_{-1}^{1} P_\nu(x)P_\mu(x)(1+x)^{\nu+\mu}\, dx$$
$$= 2^{\nu+\mu+1}[\Gamma(\nu+\mu+1)]^4/\Gamma(2\nu+2\mu+2)$$
$$\mathrm{Re}\,(\nu+\mu+1)>0.$$

其余的包含勒让特函数的積分式可参看第7章及 Bailey, 1931, p. 187; Banerjee, 1940, p. 25; Barnes, 1908, pp. 179–204; B. N. Bose, 1944, p. 125; S. K. Bose, 1946, p. 177; Dhar and Shabde, 1932, p. 177; MacRobert, 1939, p. 203; 1940, p. 95; 1947, p. 366, 367; Meijer, 1939, p. 930; Prasad, 1930, p. 33; Shabde, 1934, p. 41; Sircar, 1927, p. 244 等著作. 关于次数的積分式見 MacRobert, 1934, 1935 的著作.

3·13. 环函数或圓环函数

当拉普拉斯方程 $\Delta V=0$ 变换为圓环坐标(η, ϑ, ϕ)时就会出現环函数或圓环函数. 直角坐标与圓环坐标的变换为

$$(1)\quad x=\frac{c\,\mathrm{sh}\,\eta\cos\phi}{\mathrm{ch}\,\eta-\cos\theta},\ y=\frac{c\,\mathrm{sh}\,\eta\sin\phi}{\mathrm{ch}\,\eta-\cos\theta},\ z=\frac{c\sin\theta}{\mathrm{ch}\,\eta-\cos\theta}.$$

作变换 $s=\mathrm{ch}\,\eta$, $V=(\mathrm{ch}\,\eta-\cos\theta)v(s,\theta,\phi)$, 方程 $\Delta V=0$ 变为

$$(2)\quad \frac{\partial}{\partial s}\left[(s^2-1)\frac{\partial v}{\partial s}\right]+\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+v/4+(s^2-1)^{-1}\frac{\partial^2 v}{\partial\phi^2}=0.$$

以 $v=v_1(s)v_2(\theta)v_3(\phi)$, 就可引出如下的 v_1 的微分方程:

$$(3)\quad (1-s^2)\frac{d^2v_1}{ds^2}-2s\frac{dv_1}{ds}+[(\nu-\tfrac12)(\nu+\tfrac12)-(1-s^2)^{-1}\mu^2]v_1=0,$$

式中 ν 及 μ 为分离参数. 根据 3–2(1) 可知(3)式的解为

$$(4)\quad v_1=\begin{cases}P^{\mu}_{\nu-\frac12}(s)\\ Q^{\mu}_{\nu-\frac12}(s)\end{cases}=\begin{cases}P^{\mu}_{\nu-\frac12}(\mathrm{ch}\,\eta)\\ Q^{\mu}_{\nu-\frac12}(\mathrm{ch}\,\eta)\end{cases}$$

由 3–2(28) 及 3–2(45) 可知在大的 η 值下的性态为

$$(5)\quad \Gamma(1-\mu)P^{\mu}_{\nu-\frac12}(\mathrm{ch}\,\eta)=2^{2\mu}(1-e^{-2\eta})^{-\mu}e^{-(\nu+\frac12)\eta}\times F(\tfrac12-\mu,\tfrac12+\nu-\mu;1-2\mu;1-e^{-2\eta}),$$

$$(6)\quad \Gamma(1+\nu)Q^{\mu}_{\nu-\frac12}(\mathrm{ch}\,\eta)=\pi^{\frac12}e^{i\mu\pi}\Gamma(\tfrac12+\nu+\mu)(1-e^{-2\eta})^{\mu}e^{-(\nu+\frac12)\eta}\times F(\tfrac12+\mu,\tfrac12+\nu+\mu;1+\nu;e^{-2\eta}).$$

(4) 式的特殊情况为

$$(7)\quad P_{-\frac12}(\mathrm{ch}\,\eta)=(\tfrac12\pi\,\mathrm{ch}\,\eta/2)^{-1}K(\tanh\eta/2),$$

$$(8)\quad Q_{-\frac12}(\mathrm{ch}\,\eta)=2e^{-\eta/2}K(e^{-\eta}),$$

$$(9)\quad P_{\frac12}(\mathrm{ch}\,\eta)=(\pi/2)^{-1}e^{\eta/2}E[(1-e^{-2\eta})^{\frac12}].$$

式中的 K 及 E 分别为第一类及第二类的完全椭圆积分(見 Darling, 1923; Lowry, 1926; Airey, 1935).

环函数的其他一切性質及表示式由本章的前几節公式中可以得出(关于包含圆环函数的展开式定理見 Banerjee, 1938; 1942).

3–14. 圓錐函数

微分方程

$$(1)\quad (1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2}-2z\frac{dw}{dz}-[p^2+\tfrac14+(1-z^2)^{-1}\mu^2]w=0$$

(p 为实参数)是 3-2(1) 的一个特殊情形,此时 $\nu=-\frac{1}{2}+ip$.

(1) 式的解为

$$P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+ip}(z) \text{ 及 } Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+ip}(z). \tag{2}$$

圓錐函数就是实自变数 x 在数值上小于 1 时的解.

$$P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+ip}(\cos\theta) \text{ 及 } Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}-ip}(\cos\theta). \tag{3}$$

这些函数的主要性質可从 $P^{\mu}_{\nu}(\cos\theta)$ 及 $Q^{\mu}_{\nu}(\cos\theta)$ 的一般結果中得出. 例如,由 3-5(7) 及 3-5(8), 有

$$P_{-\frac{1}{2}+ip}(\cos\theta)=1+\frac{p^2+(\frac{1}{2})^2}{2^2}(\sin\theta)^2+\frac{[p^2+(\frac{1}{2})^2][(p^2+(3/2)^2]}{2^2\cdot 4^2}(\sin\theta)^4+\cdots \quad 0\leqslant\theta<\frac{1}{2}\pi, \tag{4}$$

$$P_{-\frac{1}{2}+ip}(\cos\theta)=1+\frac{4p^2+1^2}{2^2}(\sin\theta/2)^2+\frac{(4p^2+1^2)(4p^2+3^2)}{2^2\cdot 4^2}(\sin\theta/2)^4+\cdots \quad 0\leqslant\theta<\pi, \tag{5}$$

可見第一类的圓錐函数在 p 是实数时具有正値. (5) 的一个特殊情形是

$$P_{-\frac{1}{2}}(\cos\theta)=(\tfrac{1}{2}\pi)^{-1}K(\sin\theta/2)$$

K 是第一类完全橢圓積分(見 Darling, 1923; Lowry, 1926; Airey, 1935).

类似于紐孟公式 3-6(29) 及希英公式 3 10(9) 的公式, 曾由米勒導出(見 Mehler 的著作, 1881, p. 193):

$$\pi P_{-\frac{1}{2}+ip}(-x)=\operatorname{ch}(p\pi)\int_1^{\infty}(v-x)^{-1}P_{-\frac{1}{2}+ip}(v)\,dv \quad x<1, \tag{6}$$

$$(y-x)^{-1}=\pi\int_0^{\infty}\frac{p\tanh p\pi}{\cos p\pi}P_{-\frac{1}{2}+ip}(y)P_{-\frac{1}{2}+ip}(-x)\,dp. \tag{7}$$

这些公式是下面的反演公式的一个特殊情形(見 Mehler, 1881, p. 192; Fock, 1943).

$$f(t)=t\tanh(\pi t)\int_1^{\infty}P_{-\frac{1}{2}+it}(x)g(x)\,dx, \tag{8}$$

(9) $$g(x)=\int_0^\infty P_{-\frac{1}{2}+it}(x)f(t)\,dt.$$

圓錐函数的其他一切性質及表示式可由本章前几節的公式中導出，还可参看 Mehler, 1881 及 Neumann, 1881 的著作．关于包含圓錐函数的展开式理論可参看 Banerjee, 1938 的著作 p. 30.

3–15. 盖根堡函数

3–15–1. 盖根堡多項式

n 为整数的盖根堡多項式 $C_n^\nu(z)$ 定义为 $(1-2hz+h^2)^{-\nu}$ 依 h 的幂展开时 h^n 的系数(見 10–9 節)：

(1) $$(1-2hz+h^2)^{-\nu}=\sum_{n=0}^\infty C_n^\nu(z)h^n,\quad |h|<|z\pm(z^2-1)^{\frac{1}{2}}|.$$

因为

$$(1-2hz+h^2)^{-\nu}=(1-h)^{-2\nu}[1+2h(1-h)^{-2}(1-z)]^{-\nu}$$
$$=\sum_{s=0}^\infty(-2)^s\Gamma(s+\nu)(-z)^s h^s(1-h)^{-2s-2\nu}/[s!\Gamma(\nu)]$$

且

$$h^s(1-h)^{-2s-2\nu}=\sum_{m=0}^\infty\Gamma(m+2s+2\nu)h^{m+s}/[m!\Gamma(2s+2\nu)],$$

故(1)式中 h^n 的系数为

(2) $$C_n^\nu(z)=\sum_{l=0}^n\frac{(-1)^l\Gamma(\nu+l)\Gamma(n+2\nu+l)(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z)^l}{l!\Gamma(\nu)\Gamma(2l+2\nu)(n-l)!},$$

由 1–2(3), 1–20(5), 及 2–1(2), 得

(3) $$C_n^\nu(z)=\frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\nu)}F(n+2\nu,\ -n;\ \nu+\tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}z)$$

$$n=0,1,2,\cdots$$

从(3)及 3–2(7)，得

(4) $$C_n^\nu(z)=2^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma(n+2\nu)\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})(z^2-1)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu}\times P_{n+\nu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\nu}(z)/[\Gamma(2\nu)\Gamma(n+1)]$$

从(4)及 3–2(22)，有

(5) $$C_{2n}^\nu(z)=(-1)^n\Gamma(\nu+n)F(-n,\ n+\nu;\ \tfrac{1}{2};\ z^2)/[n!\Gamma(\nu)],$$

(6) $C_{2n+1}^{\nu}(z)=(-1)^{n}2\Gamma(\nu+n+1)$
$$\times zF(-n,n+\nu+1;3/2;z^{2})/[n!\Gamma(\nu)].$$

从(3)，(5)及(6)可得

(7) $C_{n}^{\nu}(1)=(-1)^{n}C_{n}^{\nu}(-1)=\Gamma(n+2\nu)/[n!\Gamma(2\nu)].$

从 3-2(23) 可得

(8) $C_{n}^{\nu}(z)=(2z)^{n}\Gamma(\nu+n)$
$$\times F(-\tfrac{1}{2}n,\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}n;1-\nu-n;z^{-2})/[n!\Gamma(\nu)],$$

(9) $C_{n}^{\nu}(z)=[\Gamma(\nu)]^{-1}$
$$\times\sum_{m=0}^{\leq\frac{1}{2}n}(-1)^{m}\Gamma(\nu+n-m)(2z)^{n-2m}/[m!(n-2m)!].$$

从而可知

(10) $C_{n}^{\nu}(z)=(1-z^{2})^{\frac{1}{2}-\nu}\dfrac{d^{n}}{dz^{n}}[(1-z^{2})^{n+\nu-\frac{1}{2}}]$
$$\times(-2)^{n}\Gamma(\nu+n)\Gamma(2\nu+n)/[n!\Gamma(\nu)\Gamma(2\nu+2n)].$$

从(9)

(11) $\dfrac{d^{n}}{dz^{n}}[C_{n}^{\nu}(z)]=2^{n}\Gamma(\nu+n)/\Gamma(\nu).$

$C_{n}^{\nu}(\cos\phi)$ 的三角展开式可用如下方法導出．先列出等式

(12) $(1-2h\cos\phi+h^{2})^{-\nu}=(1-he^{i\phi})^{-\nu}(1-he^{-i\phi})^{-\nu},$

而后將左边部分和右边的每一因式均依 h 的冪展开．这样就得

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_{n}^{\nu}(\cos\phi)h^{n}[\Gamma(\nu)]^{2}$$
$$=\left\{\sum_{s=0}^{\infty}\Gamma(s+\nu)h^{s}e^{is\phi}/s!\right\}\left\{\sum_{l=0}^{\infty}\Gamma(l+\nu)h^{l}e^{-il\phi}/l!\right\},$$

比較等式两边 h^{n} 的系数，就得

$$[\Gamma(\nu)]^{2}C_{n}^{\nu}(\cos\phi)$$
$$=\sum_{m=0}^{n}\Gamma(m+\nu)\Gamma(n-m+\nu)e^{-i(n-2m)\phi}/[m!(n-m)!],$$

或

(13) $\tfrac{1}{2}[\Gamma(\nu)]^{2}C_{n}^{\nu}(\cos\phi)$
$$=\sum_{m=0}^{<\frac{1}{2}n}\Gamma(m+\nu)\Gamma(n-m+\nu)\cos[(n-2m)\phi]/[m!(n-m)!],$$

当 n 为偶数时，只应取最后一项（对应于 $m=\frac{1}{2}n$）的一半.

从(13)可得

$$\lim_{\nu\to 0}\Gamma(\nu)C_n^\nu(\cos\phi)=2n^{-1}\cos(n\phi),\quad n=1,2,3,\cdots \tag{14}$$

从下面的恒等式

$$(1-2h\cos\phi+h^2)^{-1}$$
$$=(2i\sin\phi)^{-1}[(1-he^{i\phi})^{-1}e^{i\phi}-(1-he^{-i\phi})^{-1}e^{-i\phi}],$$

可得

$$C_n^1(\cos\phi)=\sin[(n+1)\phi]/\sin\phi. \tag{15}$$

要建立如下的盖根堡多项式的正交关系：

$$\int_{-1}^{1}C_n^\nu(x)C_r^\nu(x)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dx=0 \qquad n\neq r, \tag{16}$$

$$\int_{-1}^{1}[C_n^\nu(x)]^2(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2^{1-2\nu}\pi\Gamma(n+2\nu)}{n!(\nu+n)[\Gamma(\nu)]^2}, \tag{17}$$

可将左边的積分式用公式(10)寫成如下形式

$$\frac{(-2)^n\Gamma(\nu+n)\Gamma(2\nu+n)}{n!\Gamma(\nu)\Gamma(2\nu+2n)}\int_{-1}^{1}C_r^\nu(x)\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n+\nu-\frac{1}{2}}]\,dx.$$

作 n 次分部積分并引用公式(11)即可得公式(16)，(17).

取 $C_0^\nu(x)=0$，由(16)及(17)可得

$$\int_0^\pi C_n^\nu(\cos\phi)(\sin\phi)^{2\nu}\,d\phi=\begin{cases}0 & n=1,2,3,\cdots\\ 2^{-2\nu}\pi\Gamma(2\nu+1)[\Gamma(1+\nu)]^{-2} & n=0.\end{cases} \tag{18}$$

$C_n^\nu(z)$ 的加法定理曾由盖根堡導出如下（見 Gegenbauer, 1893, p. 942）：

$$[\Gamma(\nu)]^2C_n^\nu(zz_1-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}(z_1^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\phi] \tag{19}$$
$$=\Gamma(2\nu-1)\Bigg[\sum_{l=0}^{n}(-1)^l4^l\Gamma(n-l+1)[\Gamma(\nu+l)]^2(2\nu+2l-1)$$
$$\times[\Gamma(n+2\nu+l)]^{-1}(z^2-1)^{\frac{1}{2}l}(z_1^2-1)^{\frac{1}{2}l}C_{n-l}^{\nu+l}(z)C_{n-l}^{\nu+l}(z_1)$$
$$\times C_l^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\phi)\Bigg].$$

从公式(18)及(19)可得

(20) $$\int_0^{\pi} C_n^{\nu}(\cos\psi\cos\psi'+\sin\psi\sin\psi'\cos\phi)(\sin\phi)^{2\nu-1}\,d\phi$$
$$=2^{2\nu-1}\,n!\,[\Gamma(\nu)]^2 C_n^{\nu}(\cos\psi)C_n^{\nu}(\cos\psi')/\Gamma(2\nu+n)$$
$$\mathrm{Re}\,\nu>0.$$

(其他的積分式參看 Watson, 1944 的著作 pp. 367-369).

3-15-2. 蓋根堡函数

从 2-1(1) 式可知，如果以 α (α 任意的)代替 n，則公式(3)就是方程

(21) $$(z^2-1)w''+(2\nu+1)zw'-\alpha(\alpha+2\nu)w=0$$

的一个解．因此我們在(3)或(4)式中以 α 代 n 后，就可用所得的式子來定义任意 α (可能是复数)的蓋根堡函数．

从公式 (4), 3-7(6), 3-7(8) 及 3-7(34) 分别可得

(22) $$C_\alpha^{\nu}(z)=\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\alpha+2\nu)\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})/[\Gamma(\nu)\Gamma(2\nu)\Gamma(\alpha+1)]$$
$$\times\int_0^{\pi}[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos t]^{\alpha}(\sin t)^{2\nu-1}\,dt\qquad \mathrm{Re}\,\nu>0,$$

(23) $$C_\alpha^{\nu}(\cos\phi)=2^{\nu}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\alpha+2\nu)\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})/[\Gamma(\nu)\Gamma(2\nu)\Gamma(\alpha+1)]$$
$$\times(\sin\phi)^{1-2\nu}\int_0^{\phi}\cos[(\nu+\alpha)v](\cos v-\cos\phi)^{\nu-1}\,dv$$
$$\mathrm{Re}\,\nu>0,\ 0<\phi<\pi,$$

(24) $$C_\alpha^{\nu}(z)=-\pi^{-1}\sin(\alpha\pi)\int_0^{\infty}(1+2tz+t^2)^{-\nu}t^{-\alpha-1}\,dt$$
$$-2<\mathrm{Re}\,\nu<\mathrm{Re}\,\alpha<0,\quad |\arg(z\pm1)|<\pi.$$

(其他的積分表示式見 Dinghas, 1950 的著作).

最后一式的米林反演式为

(25) $$(1+2tz+t^2)^{-\nu}=\tfrac{1}{2}i\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}(\sin\alpha\pi)^{-1}t^{\alpha}C_\alpha^{\nu}(z)\,d\alpha$$
$$-2<\mathrm{Re}\,\nu<c<0.$$

从(4)及 3-8 節可知

(26) $$(\alpha+2)C_{\alpha+2}^{\nu}(z)=2(\nu+\alpha+1)zC_{\alpha+1}^{\nu}(z)-(2\nu+\alpha)C_\alpha^{\nu}(z),$$

(27) $$\alpha C_\alpha^{\nu}(z)=2\nu[zC_{\alpha-1}^{\nu+1}(z)-C_{\alpha-2}^{\nu+1}(z)],$$

(28)　$(\alpha+2\nu)C_\alpha^\nu(z)=2\nu[C_\alpha^{\nu+1}(z)-zC_{\alpha-1}^{\nu+1}(z)]$,

(29)　$\alpha C_\alpha^\nu(z)=(\alpha-1+2\nu)zC_{\alpha-1}^\nu(z)-2\nu(1-z^2)C_{\alpha-2}^{\nu+1}(z)$,

(30)　$\frac{d}{dz}C_\alpha^\nu(z)=2\nu C_{\alpha-1}^{\nu+1}(z)$.

从 3-3(1) 及 (4)，得

(31)　$C_\alpha^\nu(z)=-\sin(\alpha\pi)\,C_{-\alpha-2\nu}^\nu(z)/[\sin\pi(\alpha+2\nu)]$.

很容易看出，盖根堡微分方程(21)的第二个解为

(32)　$D_\alpha^\nu(z)=2^{-1-\alpha}\frac{\Gamma(\nu)\Gamma(2\nu+\alpha)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)}F(\nu+\frac{1}{2}\alpha,\nu+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha;$
$\nu+\alpha+1;z^2)$.

$D_\alpha^\nu(z)$ 满足 $C_\alpha^\nu(z)$ 所满足的同样遞推关系.

華特生(1938)曾導出了一个 $D_n^\nu(z)$ 与 $C_n^\nu(z)$ 之間的关系式. 类似于克列司托費耳所導出的 $Q_n(z)$ 与 $P_n(z)$ 之間的关系式[見 3-6(24), 3-6(28)]，如下:

(33)　$$D_n^\nu(z)=\Gamma(2\nu)C_n^\nu(z)\int_z^\infty(t^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}}dt$$
$$-\Gamma(2\nu)(z^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}\sum_{m=0}^{[\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}]}(\nu+n-2m-1)$$
$$\times\frac{(1-\nu)_m(2\nu+n-m)_m}{(n-m)_{m-1}(\nu)_{m+1}}C_{n-2m-1}^\nu(z)$$

$\mathrm{Re}\,\nu>0$.

3-16. 其他的一些記法

在 $Q_\nu^\mu(z)$ 的定义式 3-2(5) 中因子 $e^{i\mu\pi}$ 是常被删去的 (MacRobert).

在巴尼斯所作 $Q_\nu^\mu(z)$ 的定义中，3-2(8) 式的因子 $e^{i\mu\pi}$ 是以

$$\frac{\sin[\pi(\nu+\mu)]}{\sin(\nu\pi)}$$

來代替的；此外，3-4(2) 式左边的因子 $e^{i\mu\pi}$ 是删略掉的.

裴勒的連帶勒上特函数(見 Mac Robert, 1947, p. 307)是以 $T_\nu^\mu(x)$ 表示的，它与 $P_\nu^\mu(x)$ 是等价的，$(-1<x<1)$,

朱及斯特拉頓在1941年曾用过另外一种記法來表示盖根堡函数，代替(4)及(32)的分別是

$$C_{\alpha}^{\nu}(z)=(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\nu}P_{\alpha+\nu}^{\nu}(z),$$

$$D_{\alpha}^{\nu}(z)=(z^2-1)^{-\frac{1}{2}\nu}Q_{\alpha+\nu}^{\nu}(z).$$

它們滿足如下的微分方程

$$(z^2-1)w''+2(\nu+1)zu-\alpha(\alpha+2\nu+1)=0.$$

参 考 文 献

Airey, J. R. 1935: *Philos. Mag.* 19, 177-178.

Bailey, W. N., 1931: *Proc. Cambridge Philos. Soc* 27, 184-189, 381-386.

Bailey, W. N., 1938: *J. London Math. Soc.* 13, 167-169.

Banerjee, D. P., 1932: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 24, 89-94.

Banerjee, D. P., 1938: *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 34, 30-32.

Banerjee, D. P., 1940: *J. Indian Math. Soc.* 4, 25-28.

Banerjee, D. P., 1942: *Amer. J. Math.* 64, 72-80.

Barnes, E. W., 1908: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 39, 97-204.

Bateman, Harry, 1932: *Partial differential equations of math. Phy.* Cambridge.

Bateman, Harry and S. O. Rice, 1938: *Amer. J. Math.* 60, 297-308.

Bose, B. N., 1944: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 36, 125-132.

Bose, S. K., 1946: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 38, 177-184.

Chu, L. J., and J. A. stratton, 1941: *J. Math. Physics* 20, 259-309.

Cooke, R. G., 1925: *Proc. London Math. Soc.* (2)23, XIX-XX.

Copson, E. T., 1945: *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2)7, 81-82.

Cowling, T. G., 1940: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 11, 222-224.

Darling, H. B. C., 1923: *Quart. J. Math.*, 49, 289-303.

Dhar, S. C., and N. G. Shabde, 1932: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 24, 177-186.

Dinghas, Alexander, 1950: *Math. Z.* 53, 76-83.

Dougall, John, 1919: *Proc Edinburgh Math. Soc.* 37, 33-47.

Erdelyi, Arthur, 1941: *Philos. Mag.* (7)32, 351-352.

Fock, V. A., 1943: *C. R.* (Doklady) *Acad. Sci. U. R. S. S.* (N. S.) 39, 253-256.

Gegenbauer, L., 1893: *Wiener sitzungsberichte*, 102, 942.

Gormley, P. G., 1934: *J. London Math. Soc.* 9, 149-152.

Heine, Emil, 1878 and 1881: *Theorie der Kugelfunktionen*, G. Riemer Berlin.

Hobson, E. W., 1931: *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics* Cambridge.

Lense, Josef, 1950: *Kugelfunktionen*, Akademische Verlagsgesellschaft

Lowry, H. V., 1926: *Philos. Mag.* 2, 1181-1187.

MacDonald, H. M., 1914: *Proc. London Math. Soc.*, 13, 220-221.

MacRobert, T. M., 1932: *Philos. Mag.* (7), 14, 632-656.

MacRobert, T. M., 1934: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 54, 135-144.

MacRobert, T. M., 1935: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 55, 85-90.

MacRobert, T. M., 1936: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 57, 19-25.

MacRobert, T. M., 1936: *Philos. Mag.* (7)27, 703-705.

MacRobert, T. M., 1940: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 11, 95-100.

MacRobert, T. M., 1943: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 14, 1-4.

MacRobert, T. M., 1947: *Spherical harmonics*, Methuen.

Mehler, F. G., 1881: *Math. Ann.* 18, 161-194.

Meijer, C. S., 1939: *Nederl. Akad. Wetensch., Proc.* 42, 930-947.

Neumann, C., 1881: *Math. Ann.* 18, 195-236.

Olbricht, R., 1887: *Nova Acta Acad. Leop.* 52, 1-48.

Prasad, Ganesh, 1930: *Proc. Benares. Math. Soc.* 12, 33-42.

Prasad, Ganesh, 1930 (Vol. 1) and 1932 (Vol. 2): *A treatise on spherical harmonics and the functions of Bessel and Lamé*, Benares, Math. Soc. India.

Prasad, Ganesh, 1930: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 22, 159-170.

Prasad, Ganesh, 1931: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 23, 155-182.

Shabde, N. G., 1931: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 23, 23-44, 155-182.

Shabde, N. G., 1932: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 24, 53-60.

Shabde, N. G., 1933: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 25, 23-30.

Shabde, N. G., 1934: *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 4, 41-46.

Shabde, N. G., [illegible]: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 31, 87-[illegible]

Shabde, N. G., [illegible]: *Bull. Calcutta Math. Soc.* [illegible], [illegible]

Shabde, N. G., 1945: *Proc. Benares Math. Soc.* 7, 51-53.

Sircar H., 1927: *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 1, 244-245.

Titchmarsh, E. C., 1932: *The theory of functions*, Oxford.

Watson, G. N., 1938: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 9, 128-140.

Watson, G. N., 1944: *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge.

Whittaker, E. T. and G. N. Watson, 1927: *A course of modern analysis*, Cambridge.

Wrinch, D., 1930: *Philos. Mag.* (7)10, 1037-1043.

第四章 廣义超比級数

4-1. 引言

在高斯的超比級数 $F(a, b; c; z)$ 中，如果引入 p 个 a, b 性質的參数及 q 个 c 性質的参数，就可將这一級数普遍化．这样所得的級数

$$(1)\quad {}_pF_q\begin{bmatrix}a_1\cdots, a_p; z\\ \rho_1\cdots, \rho_q\end{bmatrix} = {}_pF_q(a_r; \rho_t; z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a_1)_n\cdots(a_p)_n z^n}{(\rho_1)_n\cdots(\rho_q)_n n!}$$

叫做廣义超比級数．在現在这一記法中，高斯級数为

$${}_2F_1(a, b; c; z) \equiv F\begin{bmatrix}a, b; z\\ c\end{bmatrix}$$

此处

$$(2)\quad (a)_0=1,\ (a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1) = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)\qquad n=1, 2, \cdots$$

z 是一复变数．在一般情形下(卽除了足使級数終結或成为無意义的参数的某些整数值之外)，如 $p\leqslant q$，則对于所有有限的 z，${}_pF_q$ 均收斂，如 $p=q+1$，則对于 $|z|<1$，${}_pF_q$ 收斂，如 $p>q+1$，則对所有 $z\neq 0$ 均發散．

数 $a_1, \cdots, a_p$ 称为分子参数，$\rho_1, \cdots, \rho_q$ 称为分母参数．

級数 ${}_pF_q$ 并不是高斯級数的唯一推廣式．超比方程是一个富契司型的綫性微分方程，但因級数 (1) 也滿足一綫性微分方程，这就不是富契司型的了．因此，微分方程就可以作为其他普遍化的根据，有人以为这种廣义式是高階富契司型方程的解．就在这样的基礎上，L. 波奇亭尔 (1870) 曾研究了最普遍的 n 階綫性齐次微分方程，这种方程在 $a_1, a_2\cdots a_n, \infty$ 上具有奇点，而且在每一奇点 a_ν $(\nu=1, 2, \cdots, n)$ 鄰域中的通解具有如下形式:

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m(z-a_\nu)^m + z^\rho\sum_{m=0}^{\infty} c'_m(z-a_\nu)^m$$

其中 $c_0, c_1, \cdots c_{n-2}$ 及 c'_0 均为任意常数．同样，对于通解的大的

z，假令其展开式具有如下形式：

$$z^{\sigma}\sum_{m=0}^{\infty}g_m z^{-m}+z^{\tau}\sum_{m=1}^{\infty}g'_m z^{-m},$$

其中 $g_0, \cdots g_{n-2}$ 及 g'_0 也是任意常数. 可以証明，微分方程可以由这些公設來确定.

其他普遍化的一个根据是許瓦兹的 s-函数（見 2-7-2 節），这一函数將一半平面映射于三段圓弧組成的三角形上. 柯龐斐耳斯（1937, 1938）曾研究过能將四段圓弧圍成的面積映射到一半平面上的函数，他作了这样的假設：曲綫四边形的四个角中有二个等于 $\pi/2$，其余二个或为 $\pi/2$ 及 $3\pi/2$，或为 $3\pi/2$ 及 $3\pi/2$.

在 $|z|$ 很大的情形下，E. M. 拉爱特（1935, 1940）曾研究过和式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha_1+\beta_1 n)\cdots\Gamma(\alpha_p+\beta_p n)}{\Gamma(\rho_1+\mu_1 n)\cdots\Gamma(\rho_q+\mu_q n)}\frac{z}{n!}$$

的漸近性态，此处 β_r 及 μ_t 均为正实数，且

$$1+\sum_{t=1}^{q}\mu_t-\sum_{r=1}^{p}\beta_r>0.$$

如 μ_t 及 β_r 均等于 1，則上式就是 ${}_pF_q$ 的倍数.

希英的超比級数將在 4-8 節中討論. 其余的廣义式見第五章.

在本章中下面的一些約定是应予注意的.

在 ${}_pF_q$ 中，q 个参数 $\rho_1, \cdots, \rho_q$ 的値恢異于 $0, -1, -2, \cdots$.

在 ${}_{q+1}F_q$ 中，如变量 z 不等于 1，我們默認 $|z|<1$.

如 ${}_{q+1}F_q$ 中的变量 z 等于 1，我們就总假定

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{t=1}^{q}\rho_t-\sum_{r=1}^{q+1}\alpha_r\right\}>0.$$

如 ${}_pF_q$ 中的变量 z 等于 1，則这一变量常省略不寫.

4-2. 微分方程

函数 ${}_pF_q$ 由 4-1(1) 式定义. 在 $p=3, q=2$ 的情形下，这一級数系由克劳生（1828）所介紹；記法是波奇亨уй所提出，并由巴尼

斯所修正．如 a_r 之一为非正的整数，則級数有尽；ρ_t 之一为非正的整数的情形除外．

如 $p=q+1$，且

(1) $s=\operatorname{Re}(\rho_1+\cdots+\rho_q-a_1-\cdots-a_{q+1})$，

則如 $s>1$，級数 4-1(1) 对所有的 $|z|=1$ 均收斂；如 $1\geqslant s\geqslant 0$，級数对所有的 $|z|=1$，$z\neq 1$ 均收斂；如 $s\leqslant 0$，級数則發散．其証明与 2-1-1 節 ${}_2F_1$ 的情形相同．

令 δ 表示算符 zd/dz．則 $u={}_pF_q$ 滿足方程

(2) $\{\delta(\delta+\rho_1-1)\cdots(\delta+\rho_q-1)-z(\delta+a_1)\cdots(\delta+a_p)\}u=0.$

上式与下面形式的一般方程等价：

(3) $$\sum_{n=1}^{q} z^{n-1}(a_n z-b_n)D^n v+a_0 v+z^q D^{q+1}v=0,\quad q\geqslant p.$$

或

(4) $$\sum_{n=1}^{q} z^{n-1}(a_n z-b_n)Dv+a_0 v+z^q(1-z)D^{q+1}v=0,\ p=q+1,$$

其中 a_n，b_n 是常数，$a_n\neq 0$，且 $D=d/dz$．$z=0$ 及 $z=\infty$ 是方程 (3) 的奇点，其中 $z=0$ 是正則奇点（参看 Poole 1936，的著作第 5 章）；式 (4) 是富契司型方程（見 Poole，1936，p. 77），有正則奇点在 $0,\infty,1$．$z=0$ 及 $z=\infty$ 鄰域的綫性独立解組見 5-4 節．本節及所举文献的極大部分中，只討論沒有一个 ρ_t 及沒有一个差分 $\rho_r-\rho_s$，a_r-a_s $(r\neq s)$ 为整数的"一般"情形．

在 $p\leqslant q$ 的情形下，E. W. 巴尼斯(1906)曾導出"一般"情形（見上文）中(2)式的解的漸近展开式．L. 波奇亨朩 (1893 b) 曾研究了 (2) 及 (3) 的各种形式，并導出了重積分形式的綫性独立解的全組．对于 $q=3$，及 $q=4$ $(p\leqslant q)$ 的特殊情形，L. 波奇亨朩 (1893 a，1895，1898) 曾作了專門的研究．

在 $p=q+1$ 的情形下，波奇亨朩(1888 b)就"一般"情形研究了式(2)及(4)，并導出了 $z=0,\infty,1$ 鄰域中解的重積分．他还証明在 $z=1$ 鄰域中存在着 p 个綫性独立解且都是單值的．$p=3$，$q=2$ 的情形已由 E. 戈尔薩特(1883，1884) 証明过．对于 $p=3$，$q=2$，陶馬 (1869) 曾導出 $z=0$ 及 $z=\infty$ 上綫性独立解全組之間

的关系. F. G. 斯密司(1938, 1939) 曾就所有 $p(=q+1)$ 的值研究过这些全組之間的关系,他还对 (2) 及 (4)式的一些解中包含对数的各种特殊情形作了研究(差分 $\rho_t-\rho_s$ 的全部或一部可为整数,但 $\rho_t-\alpha$ 及 ρ_t 本身不为整数,或 a_r-a_s 的全部或一部为整数,但 $a_r-\rho_t$ 及 a_r 本身不为整数).

如 $v(z)$ 滿足 (2), 且 $v(z)$ 可从解析函数 $w(t)$ 通过拉普拉斯变換,

$$v(z)=\int_0^\infty e^{-zt}w(t)\,dt,$$

使滿足条件 $\lim\limits_{t\to0}w(t)=0$ 而得出,則 $w(t)$ 滿足方程

$$(5)\qquad \{(-1)^{p+1}\theta(\theta+1-a_1)\cdots(\theta+1-a_p) \\ +(-1)^{q+1}t(\theta+1)(\theta+2-\rho_1)\cdots(\theta+2-\rho_q)\}v=0.$$

其中 $\theta=t\partial/\partial t$.

包含廣义超比級数的函数所滿足的微分方程的其他結果可參看 Chaundy (1943) 的著作.

4-3. 恒等关系及遞推关系

T. 克劳生 (1828) 曾証明

$$(1)\qquad [F(a,b;a+b+\tfrac{1}{2};z)]^2={}_3F_2\left[\begin{matrix}2a,\ a+b,\ 2b;\ z\\ a+b+\tfrac{1}{2};\ a+2b;\end{matrix}\right]$$

他还証明这是 $F(a,b;c;z)$的平方可以用自变量 z 的 ${}_3F_2$ 來表示的唯一情形. 更一般的是 E. 戈尔薩特 (1883) 的結論,他証明 $F(a,b;c;z)\ F(a',b';c';z)$ 僅当

$$a'=a+1-c,\quad b'=b+1-c,\quad c'=2-c,$$
$$c-a-b=n+\tfrac{1}{2},\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

或当

$a-a'$, $b-b'$, $c-c'$ 为整数,

$$c+c'-a-a'-b-b'=n,\quad n=0,1,2,\cdots$$

时才能用自变量 z 的 ${}_pF_q$ 來表示.

W. N. 巴萊 (1928) 对这一問題作了新的証明,沃尔.潘利斯

(1924) 及雷門尼強也導出了类似的結果，并在他們的結果中补充了几个新的公式。

$$(2)\quad {}_0F_1(\rho; z)\,{}_0F_1(\sigma; z) = {}_2F_3(\tfrac{1}{2}\rho+\tfrac{1}{2}\sigma, \tfrac{1}{2}\rho+\tfrac{1}{2}\sigma-\tfrac{1}{2}; \rho, \sigma, \rho+\sigma-1; 4z)$$

$$(3)\quad {}_0F_1(\rho; z)\,{}_0F_1(\rho; -z) = {}_0F_3(\rho, \tfrac{1}{2}\rho, \tfrac{1}{2}\rho+\tfrac{1}{2}; -z^2/4)$$

$$(4)\quad {}_2F_0(\alpha, \beta; z)\,{}_2F_0(\alpha, \beta; -z) = {}_4F_1[\alpha, \beta, \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta), \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+1); \alpha+\beta; 4z^2]$$

$$(5)\quad {}_1F_1(\alpha; \rho; z)\,{}_1F_1(\alpha; \rho; -z) = {}_2F_3(\alpha, \rho-\alpha; \rho, \tfrac{1}{2}\rho, \tfrac{1}{2}(\rho+1); z^2/4)$$

$$(6)\quad {}_1F_1(\alpha; 2\alpha; z)\,{}_1F_1(\beta; 2\beta; -z) = {}_2F_3[\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta), \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+1); \alpha+\tfrac{1}{2}, \beta+\tfrac{1}{2}, \alpha+\beta; z^2/4]$$

$$(7)\quad {}_0F_2(\rho_1, \rho_2; z)\,{}_0F_2(\rho_1, \rho_2; -z) = {}_3F_8\left[\begin{matrix}\tfrac{1}{3}(\rho_1+\rho_2-1), \tfrac{1}{3}(\rho_1+\rho_2), \tfrac{1}{3}(\rho_1+\rho_2+1); -(\tfrac{3}{4})^3 z^2\\ \rho_1, \rho_2, \tfrac{1}{2}\rho_1, \tfrac{1}{2}\rho_2, \tfrac{1}{2}\rho_1+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rho_2+\tfrac{1}{2}, \lambda, \mu\end{matrix}\right]$$

式中 $\lambda=\tfrac{1}{2}(\rho_1+\rho_2-1),\ \mu=\tfrac{1}{2}(\rho_1+\rho_2)$.

$$(8)\quad {}_2F_1(\alpha, \beta; \alpha+\beta-\tfrac{1}{2}; z)\,{}_2F_1(\alpha, \beta; \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}; z) = {}_3F_2(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta; 2\alpha+2\beta-1, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}; z)$$

$$(9)\quad {}_2F_1(\alpha, \beta; \alpha+\beta-\tfrac{1}{2}; z)\,{}_2F_1(\alpha-1, \beta; \alpha+\beta-\tfrac{1}{2}; z) = {}_3F_2(2\alpha-1, 2\beta, \alpha+\beta-1; 2\alpha+2\beta-2, \alpha+\beta-\tfrac{1}{2}; z$$

(4)中的級数僅当 α 或 β 是非正整数时收斂，但就式(4)的形式意义來說，左边的冪級数的形式乘法給出右边部分，因此对所有的 α 及 β，式(4)都是形式上有效的．其余公式至少对 $|z|<1$ 有效．

卡萊及沃尔[見 2-5 (4)]的有关公式見巴萊 (1935) 的著作．下面这一公式是 H. B. C. 达林導出的 (1932) (見 Bailey 1935)：

$$(10)\quad {}_3F_2\left[\begin{matrix}\alpha, \beta, \gamma; z\\ \delta, \varepsilon\end{matrix}\right]{}_3F_2\left[\begin{matrix}1-\alpha, 1-\beta, 1-\gamma; z\\ 2-\delta, 2-\varepsilon\end{matrix}\right] = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon-\delta}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}\alpha+1-\delta, \beta+1-\delta, \gamma+1-\delta; z\\ 2-\delta, \varepsilon+1-\delta\end{matrix}\right] \times {}_3F_2\left[\begin{matrix}\delta-\alpha, \delta-\beta, \delta-\gamma; z\\ \delta, \delta+1-\varepsilon\end{matrix}\right] + \text{互換 } \delta \text{ 及 } \varepsilon \text{ 后所得的積}$$

有关卡萊及沃尔恆等关系的其他公式可參看 2-5-2 節及 J. L.

貝契納尔，T. W. 宗台 (1948) 的著作. T. W. 宗台 (1942, 1943) 曾導出了很多超比函数展开为其他超比函数的級数展开式. 其最簡單的情形有:

$$(11)\quad F(A, B; C; z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(a)_r (b)_r}{(c)_r r!}$$

$$\times {}_4F_3\left[\begin{matrix} A, B, c, -r; 1 \\ a, b, C \end{matrix}\right] z^r {}_2F_1(a+r, b+r; c+r; z)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(a)_r (b)_r}{(c+r-1)_r r!}$$

$$\times {}_4F_3\left[\begin{matrix} A, B, c+r-1, -r; 1 \\ a, b, C \end{matrix}\right] z^r {}_2F_1(a+r, b+r; c+2r; z)$$

$$(12)\quad {}_0F_1(c; pz)\, {}_0F_1(c'; qz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(pz)^n}{n!(c)_n} {}_2F_1(1-c-n, -n; c'; p/q)$$

$$(13)\quad {}_1F_1(a; c; pz)\, {}_1F_1(a'; c'; qz)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (pz)^n}{n!\,(c)_n} {}_3F_2\left[\begin{matrix} a', 1-c-n, -n; -q/p \\ c', 1-a-n \end{matrix}\right]$$

$$(14)\quad {}_2F_1(a, b; c; pz)\, {}_2F_1(a', b'; c'; qz)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n (pz)^n}{n!\,(c)_n} {}_4F_3\left[\begin{matrix} a', b', 1-c-n, -n; q/p \\ c', 1-a-n, 1-b-n \end{matrix}\right]$$

$$(15)\quad {}_2F_0(a, b; pz)\, {}_2F_0(a', b'; qz)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n (pz)^n}{n!} {}_3F_2\left[\begin{matrix} a', b', -n; -q/p \\ 1-a-n, 1-b-n \end{matrix}\right]$$

(15) 中的級数并不收斂, 除非它是有尽的; 但等式两边 z 的对应冪的系数是相等的.

两个函数 ${}_pF_q$, 如其自变量及參数除其中有一个參数在数值上相差 ± 1 外, 其余均有相同的值, 則称为是互相鄰接的. 在一个固定的 ${}_pF_q$ 及其 $2(p+q)$ 个鄰接函数之間, 有 $2p+q$ 个綫性独立的綫性关系. 这些关系的系数是变量的綫性函数及參数的多項式. E. 命維尔 (1945) 曾導出了 $p \leqslant q+1$、所有分母參数均異于 $0, -1, -2, \cdots$ 的情形下的这些綫性关系.

4-4. 自变量等于 1, $p=q+1$ 情形下的廣义超比級数

廣义超比級数的标准型 如 ${}_{q+1}F_q(\alpha_r;\rho_t;z)$ 中的参数满足条件

(1) $\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_{q+1}=-1+\rho_1+\cdots+\rho_q$

則这个級数称为是薩尔苏茨級数. 如

(2) $1+\alpha_1=\rho_1+\alpha_2=\cdots=\rho_q+\alpha_{q+1}$

則这个級数就称为是良好地均衡的. 如果 (2) 式的所有方程除一个外都成立,則超比級数称为是近似地均衡的. 这时在不改变級数本身的情形下常可將不相等的那一对参数和排列在第一对或最后一对;因此,我們分別称这时的級数 ${}_{q+1}F_q$ 为第一类或第二类近似均衡的.

薩尔苏茨定理

(3) $${}_3F_2\left[\begin{matrix}a,\ b,\ -n;\\ c,\ 1+a+b-c-n\end{matrix}\right]=\frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n(c-a-b)_n},\ n=0,1,2,\cdots$$

这一定理曾在 2-1-5 節中証明过,并寫成 2-1(30) 式,可求每一有尽的薩尔苏茨級数 ${}_3F_2$ 的和. 对于一个無尽的薩尔苏茨級数 ${}_3F_2$, 則有(見 Saalschütz 1891, Bailey 1935, p. 21)

(4) $${}_3F_2\left[\begin{matrix}a,\ b,\ c+f-a-b-1;\\ c,\ f\end{matrix}\right]$$
$$=\frac{\Gamma(c)\Gamma(f)\Gamma(c-a-b)\Gamma(f-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(f-a)\Gamma(f-b)}$$
$$+(a+b-c)^{-1}\frac{\Gamma(c)\Gamma(f)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+f-a-b)}$$
$$\times{}_3F_2\left[\begin{matrix}c-a,\ c-b,\ 1;\\ c-a-b+1,\ c+f-a-b\end{matrix}\right].$$

再,这是三个 ${}_3F_2$ 級数間的很多綫性关系之一的一个特殊情形;其詳細敍述可参看巴莱(1935)的著作,第三章.

每一个具有單位自变量而良好地均衡的 ${}_3F_2$ 都可以 γ-函数表示. 結果是

$$(5)\quad {}_3F_2\left[\begin{matrix}a, b, c\\ 1+a-b, 1+a-c\end{matrix}\right]$$
$$=\frac{\Gamma(1+\frac{1}{2}a)\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1-b-c+\frac{1}{2}a)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1-b+\frac{1}{2}a)\Gamma(1-c+\frac{1}{2}a)\Gamma(1+a-b-c)}$$

这是迪克斯恩定理(見 Dixon 1903, Watson 1924、Bailey 1937 及 MacRobert 1939). 具有單位自变量的 ${}_3F_2$ 可以計値的另一情形是

$$(6)\quad {}_3F_2\left[\begin{matrix}a, b, c;\\ \frac{1}{2}(a+b+1), 2c\end{matrix}\right]$$
$$=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(c+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2})\Gamma(c+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b)}{\Gamma(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2})/\Gamma(\frac{1}{2}b+\frac{1}{2})\Gamma(c+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a)\Gamma(c+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}b)}$$

(華特生定理,見 Whipple 1925) 又

$$(7)\quad {}_3F_2\left[\begin{matrix}a, 1-a, c;\\ f, 2c+1-f\end{matrix}\right]$$
$$=\frac{\pi\Gamma(f)\Gamma(2c+1-f)2^{1-2c}}{\Gamma(c+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}f)\Gamma(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}f)\Gamma(c+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}f)\Gamma(\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}f)}$$

(揮普耳定理,見 Whipple 1925).

道格尔定理可求具有單位自变量的、有尽而良好地均衡的 ${}_7F_6$ 在第二参数取定一特殊値时的和:

$$(8)\quad {}_7F_6\left[\begin{matrix}a, 1+\frac{1}{2}a, b, c, d, e, -n;\\ \frac{1}{2}a, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a+n\end{matrix}\right]$$
$$=\frac{(1+a)_n(1+a-b-c)_n(1+a-b-d)_n(1+a-c-d)_n}{(1+a-b)_n(1+a-c)_n(1+a-d)_n(1-a-b-c-d)_n}$$

其中 $1+2a=b+c+d+e-n$, 且 $n=0, 1, 2, \cdots$ (Dougall 1907).

具有單位元素的級数 ${}_{q+1}F_q$ 有很多变换式,即以一个或其他几个这样的級数來表示另一这样的級数的公式,在大多数情形中具有不同的 q 値. 一个簡單的例子是:

$$(9)\quad {}_4F_3\left[\begin{matrix}-n, b, c, d;\\ 1-n-b, 1-n-c, w\end{matrix}\right]=\frac{(w-d)_n}{(w)_n}$$
$$\times {}_5F_4\left[\begin{matrix}d, 1-n-b-c, -\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}n, 1-n-w;\\ 1-n-b, 1-n-c, \frac{1}{2}(1+d-w-n), 1+\frac{1}{2}(d-w-n)\end{matrix}\right]$$

这一公式把有尽的第二类近似均衡的 ${}_4F_3$ 变换为 ${}_5F_4$. 这种变换

及更复雜一些的变换可參看 Bailey (1935, 3–6 章), Whipple (1935, 1937), MacRobert (1939), Mitra (1942), Bose (1944) 的著作.

4-5. 自变量値不等于 1 的 ${}_{q+1}F_q$ 的变换

除了自变量 z 及 z^{-1} 的廣义超比級数(它們是同一微分方程的解)之間的联系式之外,在一般的情况下,如 $q>1$, 似尚不知有 ${}_{q+1}F_q$ 的綫性变换关系. 在某种情况下, ${}_3F_2$ 可有二次及三次变换,例如

$$(1)\qquad {}_3F_2\left[\begin{matrix}a,\,b,\,c;\,z\\1+a-b,\,1+a-c\end{matrix}\right]=(1-z)^{-a}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-b-c,\,\tfrac{1}{2}a,\,\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2};\,-4z(1-z)^{-2}\\1+a-b,\,1+a-c\end{matrix}\right]$$

(Whipple, 1927) 及

$$(2)\qquad {}_3F_2\left[\begin{matrix}a,\,2b-a-1,\,2-2b+a;\,z/4\\b,\,a-b+\tfrac{3}{2}\end{matrix}\right]=(1-z)^{-a}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}a/3,\,a/3+\tfrac{1}{3},\,a/3+\tfrac{2}{3};\,-27z/[4(1-z)^3]\\b,\,a-b+\tfrac{3}{2}\end{matrix}\right]$$

上面这二式是由巴萊証明的(1929). 巴萊还導出了第一类近似均衡的 ${}_3F_2$ 的綫性变换:

$$(3)\qquad (1-z)^{2a-1}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}2a-1,\,a+\tfrac{1}{2},\,a-b-\tfrac{1}{2};\,z\\a-\tfrac{1}{2},\,a+b+\tfrac{1}{2}\end{matrix}\right]=(1-z)^{2b-1}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}2b-1,\,b+\tfrac{1}{2},\,b-a-\tfrac{1}{2};\,z\\b-\tfrac{1}{2},\,a+b+\tfrac{1}{2}\end{matrix}\right]$$

貝契納尔(1948)曾証明一个自变量 x 的良好地均衡的 ${}_3F_2$ 可以表达为自变量 $-(x-1)^2/(4x)$ 的 ${}_3F_2$ 級数的和.

还有几种自变量 $\neq 1$ 的 ${}_{q+1}F_q$ 可以計值的情形也是已知的,例如

$$(4)\qquad {}_4F_3\left[\begin{matrix}a,\,1+\tfrac{1}{2}a,\,b,\,c;\,-1\\\tfrac{1}{2}a,\,1+a-b,\,1+a-c\end{matrix}\right]=\frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)}$$

(見 Bailey 1935, p. 28 及 Bailey, 1929).

几种特殊情形　4-4 節及本節中導出的公式包含了許多不能很容易直接証明的結果，这些結果在数学文献中却又很被重視．例如，4-4 (5) 給出（取 $a=b=c=-n$）：

(5) $$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\left[\binom{n}{r}\right]^3=\frac{\cos\frac{1}{2}\pi n\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n)\Gamma(1+3n/2)2^n}{\pi\Gamma(1+\frac{1}{2}n)\Gamma(1+\frac{1}{2}n)\,n!}$$

如以 $b=1+a+n$ 代入 4-4 (8) 幷令 $n\to\infty$，則得

(6) $${}_5F_4\left[\begin{matrix}a,1+\frac{1}{2}a,c,d,e;\\ \frac{1}{2}a,1+a-c,1+a-d,1+a-e\end{matrix}\right]$$
$$=\frac{\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-e)\Gamma(1+a-c-d-e)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-d-e)\Gamma(1+a-c-e)\Gamma(1+a-c-d)}$$

这式的一个特殊情形就是道格尔-雷門尼強公式

(7) $$1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)_n(-y)_n(-z)_n}{(1+x)_n(1+y)_n(1+z)_n}$$
$$=\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)\Gamma(z+1)\Gamma(x+y+z+1)}{\Gamma(y+z+1)\Gamma(x+z+1)\Gamma(x+y+1)}$$

这一式对 $\mathrm{Re}(x+y+z+1)>0$ 有效．(6) 的另一推論（取 $a=1$, $c=1-x$, $d=e=1$）为

(8) $$1-3\frac{x-1}{x+1}+5\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}-\cdots=0.$$

左边的級数当 $\mathrm{Re}\,x>1$ 时收斂．还有很多其他的特殊情形曾由巴萊 (1935, pp. 96, 97, 例題) 及哈台 (1923) 導出过．

截尾超比級数

$$y_n(a,b,c,z)=\sum_{r=0}^{n}\frac{(a)_r(b)_r}{r!\,(c)_r}z^r$$

可有二种不同的方法以 ${}_3F_2$ 表示：

$$y_n={}_3F_2\left[\begin{matrix}-n,a,b;z\\ -n,c\end{matrix}\right]=\lim_{\varepsilon\to0}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\varepsilon-n,a,b;z\\ \varepsilon-n,c\end{matrix}\right]$$

及

$$y_n=\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}z^n\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}1,-n,1-n-c;z^{-1}\\ 1-n-a,1-n-b\end{matrix}\right]$$

如 $z=1$，則

$$y_n(a, b, c, 1) = \frac{\Gamma(a+n+1)\Gamma(b+n+1)}{n!\,\Gamma(a+b+n+1)}\, {}_3F_2\begin{bmatrix} a, b, c+n; \\ c, a+b+n+1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+b-c)}{\Gamma(1-c)\Gamma(1-c+a+b)}$$

$$\times \left\{1 - \frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(n+1)!\,(c-1)_{n+1}}\, {}_3F_2\begin{bmatrix} 1-a, 1-b, n+1; \\ 2-c, n+2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{\Gamma(a+n+1)\Gamma(b+n+1)}{n!\,\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(c+n+1)}\, {}_3F_2\begin{bmatrix} c-a, c-b; c+n; \\ c, c+n+1 \end{bmatrix}$$

(見 Bailey 1935, pp. 93, 94). 截尾級数 ${}_3F_2$ 及自变量等于 1 的特殊截尾級数 ${}_7F_6$ 也有相应的公式 (見 Bailey 1935, pp. 94, 95).

4-6. 積分

类似于 2-1-3 節的欧拉積分表示式的一般 ${}_pF_q$ 的積分式曾由波奇亨本 (1893 b), 爱尔台里 (1937) 導出 [見 5-2(2)], 2-4(2) 式型的積分关系曾由彼尼(1940)導出过. 巴尼斯積分表示式2-1(15)推廣到一般 ${}_pF_q$ 的情形可由 5-3 及 5-6 節的結果中導出.

很多定積分可用一个或几个 ${}_pF_q$ 級数來表示. 特别是 ${}_pF_q$ 的拉普拉斯变换, 当 $p \le q$ 时为

$$s\int_0^\infty e^{-st}\, {}_pF_q\begin{bmatrix} \alpha_1, \cdots, \alpha_p; t \\ \rho_1, \cdots, \rho_q \end{bmatrix} dt = {}_{p+1}F_q\begin{bmatrix} 1, \alpha_1, \cdots \alpha_p; s^{-1} \\ \rho_1, \cdots, \rho_q \end{bmatrix}$$

森坎 (1946) 公式給出了 ${}_2F_2$ 的亨克尔变换:

$$\int_0^\infty t^{\rho-\frac{1}{2}}\, {}_2F_2[\rho, \tfrac{1}{2}(\rho+m+1); \tfrac{1}{2}(\rho-m+1), \tfrac{1}{2}(\rho+\nu+1); \tfrac{1}{2}t^2]$$

$$\times J_\nu(zt)\,(zt)^{\frac{1}{2}}\,dt = (-1)^m z^{\rho-\frac{1}{2}}$$

$$\times {}_2F_2[\rho, \tfrac{1}{2}(\rho+m+1); \tfrac{1}{2}(\rho-m+1); \tfrac{1}{2}(\rho+\nu+1); -\tfrac{1}{2}z^2],$$

其中

$m=0, 1, 2, \cdots$ $\mathrm{Re}(\rho+\nu+1)>0$, $\mathrm{Re}(\rho-m+1)>0$, $\mathrm{Re}\,\rho>\frac{1}{2}$.

其他特殊結果見 4-7 節及爱尔台里 (1938) 的著作.

4-7. 各种特殊結果

H. 彼得曼 (1933, 1934) 及巴司脫納克 (1939) 研究了 z 的多項式,

$$F_n(z) = {}_3F_2(-n, n+1, \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}z; 1, 1; 1) \quad n=0, 1, 2, \cdots$$

彼得曼 (1935) 研究了多项式 $Z_n(z)$ 及 $J_n^{u,v}(z)$, 它們定义为

$$Z_n(z) = {}_2F_2(-n, n+1, 1; 1; z) \qquad n=0, 1, 2, \cdots$$

$$z^{-u}J_n^{u,v}(z) = \frac{\Gamma(v+n+1+\frac{1}{2}u)}{n!\,\Gamma(u+1)\Gamma(v+1+\frac{1}{2}u)}\,{}_1F_2(-n; u+1, v+1+\tfrac{1}{2}u; z^2).$$

彼得曼的結果曾由巴司脫納克 (1937, 1939) 及 S. O. 拉爱司 (1939) 加以普遍化. 拉爱司曾用

$$H_n(\xi, p, v) = {}_3F_2(-n, n+1, \xi; 1, p; v)$$

其中 $n=0, 1, 2, \cdots$, ξ, p, v 均为复变数, 但 $p \neq -n-1, -n-2, \cdots$. 拉爱司証明

$$H_n(\xi, p, v) = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(\xi)\Gamma(p-\xi)}\int_0^1 t^{\xi-1}(1-t)^{p-\xi-1}P_n(1-2vt)\,dt.$$

$$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\xi > 0, \quad P_n(z) = {}_2F_1(-n, n+1; 1; \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}z)$$

又

$$H_n(\xi, p, v)\Gamma(p-q)\Gamma(q)\Gamma(\xi)\Gamma(p-\xi) = \frac{\Gamma(p)}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(s)\Gamma(q-s)\Gamma(\xi-s)\Gamma(p-q-\xi+s)H_n(s, q, v)\,ds$$

$$0 < \operatorname{Re}\sigma < \operatorname{Re} q, \quad 0 < \operatorname{Re}(\xi-\sigma) < \operatorname{Re}(q-p).$$

H_n 的母函数为

$$(1-t)^{-1}\,{}_2F_1[\xi, \tfrac{1}{2}; p; -4vt(1-t)^{-2}] = \sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n(\xi, p, v).$$

如 $Q_n(z)$ 以 3-6 (24) 式定义, 則

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)Q_n(z)H_n(\xi, p, v) = (s-1)^{-1}\,{}_2F_1[\xi, 1; p; 2v/(1-s)]$$

如 $n\to\infty$, 則 $H_n(\xi, p, 1)$ 的一个漸近式为

$$\frac{\Gamma(p)n^{-2\xi}}{\Gamma(p-\xi)\Gamma(1-\xi)} + (-1)^n\frac{\Gamma(p)n^{2\xi-2p}}{\Gamma(\xi-p+1)\Gamma(\xi)}.$$

俞維尔 (1945) 給出了 $J_n^{u,v}$ 的遞推关系, 幷証明 $H_n(\xi, p, v)$ 適合如下的四項遞推关系:

$$n(2n-3)(p+n-1)H_n$$
$$=(2n-1)[(n-2)(p-n+1)+2(n-1)(2n-3)$$
$$-2(2n-3)(\xi+n-1)v]H_{n-1}-(2n-3)[2(n-1)^2$$
$$-n(p-n+1)+2(2n-1)(\xi-n+1)v]H_{n-2}$$
$$-(n-2)(2n-1)(p-n+1)H_{n-3}.$$

M. C. 法申米艾(1947)曾証明

$$v\frac{\partial}{\partial v}[H_n(\xi, p, v)+H_{n-1}(\xi, p, v)]$$
$$=n[H_n(\xi, p, v)-H_{n-1}(\xi, p, v)]$$

并研究了下面的多项式:

$$f_n(a_i; b_j; z)={}_{p+2}F_{q+2}\left[\begin{matrix}-n, n+1, a_1, \cdots, a_p; z\\ \frac{1}{2}, 1, b_1, \cdots, b_q\end{matrix}\right]$$
$$i=1, \cdots, p,\ j=1, \cdots, q.$$

这一式可由下式引出

$$(1-t)^{-1}G\left[\frac{-4zt}{(1-t)^2}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(z)t^n,$$

此处

$$G(y)={}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1, \cdots, a_p; y\\ b_1, \cdots, b_q\end{matrix}\right]$$

关于 f_n 的遞推关系,級数,積分式可参看法申米艾(1947)及宗台(1943)的著作. 它的一个特殊簡單結果是彼得曼的 $Z_n(z)$ 的積分表示式:

$$Z_n(z^2)=\pi^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}e^{-t^2/4}L_n(tz)L_n(-tz)\,dt.$$

其中 $L_n(z)$ 代表 n 次拉盖尔多項式(見第十章)且

$$f_n(\xi; p; v)=i(4\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{\infty}^{(0+)}(-t)^{-\frac{1}{2}}e^{-t}H_n(\xi, p, -v/t)dt,$$

$$H_n(\xi, p, v)=\pi^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}f_n(\xi; p; vt)\,dt.$$

爱尔台里(1938)曾証明下面的展开式

$$\frac{e^{-z/2}}{t-z}=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(\lambda, \mu+n, t)z^n{}_1F_1(\lambda+n+1; 2\mu+2n; z)$$

其中

$$A_n(\lambda, \mu, t) = \sum_{r=0}^{n} c_{\lambda, \mu, r} t^{r-n-1}$$

而 $$c_{\lambda, \mu, r} = \frac{(-1)^r}{2^r r!} {}_2F_1[-r, 1-\lambda; 2(1-\mu); 2].$$

上式当 $|t|>1$, $|z|<1$, $\mu\neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 时有效.

克賴耳及弗林克(1949)曾研究了 $y_n(a, z)$ 一类的多項式. 根据俞維尔的意見它們可寫成

$$y_n(a, z) = {}_2F_0(-n, a+n-1; -z)$$

其中 $n=0, 1, 2, \cdots$, $a-1\neq 0, -1, -2, \cdots$. $y_n(a, z)$ 是与权函数 $(a-1)\,{}_1F_1(1; a-1; -z^{-1})$ 連帶的單位圓上的正交多項式. 它可用魏塔克耳函数 $W_{\kappa, \mu}(z)$ [見 6-9(5)] 來表示,

$$y_n(a, z) = e^{1/(2z)} z^{1-\frac{1}{2}a} W_{1-\frac{1}{2}a, n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a}(z^{-1}).$$

$y_n(a, z)$ 的遞推关系, 一个微分方程及其他結果可参看克賴耳及弗林克(1949)的著作.

4-8. 基礎超比級数

下面的基礎廣义超比級数理論的說明完全根据巴萊(1935)著作的第 8 章. 設 q 为一参数. 一般來說, 它將限制于区域 $|q|<1$ 内. 对于所有的 a 及 q, 我們定义

(1) $$(a)_{q,n} = (1-a)(1-aq)(1-aq^2)\cdots(1-aq^{n-1}),$$
$$n=1, 2, \cdots$$

(2) $$(a)_{q,0} = 1$$

[記号 $[a]_n$ 代 $(a)_{q,n}$ (其中 q 不顯明表出)是在文献中很常用的].

則

(3) $${}_r\Phi_s\begin{bmatrix}\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r; z\\ \rho_1, \cdots, \rho_s\end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{q,n}(\alpha_2)_{q,n}\cdots(\alpha_r)_{q,n}}{(q)_{q,n}(\rho_1)_{q,n}\cdots(\rho_s)_{q,n}} z^n$$

是 z 及 $r+s+1$ 个参数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r; \rho_1, \cdots \rho_s; q$ 的函数, 如 $r=s+1$, $q\to 1$, 可簡化为:

$${}_rF_s\begin{bmatrix}\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r; z\\ \rho_1, \cdots, \rho_s\end{bmatrix}$$

函数 ${}_2\Phi_1$ 最先由 E. 希英(1878, p. 97-125)所研究，${}_r\Phi_s$ 称为基礎超比級数；$r=s+1$ 的情形似乎是被研究过的唯一情形．二变量的基礎超比級数見 5-14 節．

最簡單的情形是 ${}_1\Phi_0(a;z)$，它是二項級数的一个推廣．可以証明

$$(4)\qquad {}_1\Phi_0(a;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{q,n}}{(q)_{q,n}}z^n=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1-aq^nz}{1-q^nz}$$

因而

$$(5)\qquad {}_1\Phi_0(a;z)\,{}_1\Phi_0(b;az)={}_1\Phi_0(ab;z)$$

(見 Bailey 1935, p. 66)，其他基本情形是：

$$(6)\qquad \frac{z}{1-q}\,{}_2\Phi_1(q,q;q^2;z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-q^n}$$

$$(7)\qquad {}_2\Phi_1(q,-1;-q;z)=1+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{1+q^n}$$

$$(8)\qquad \frac{z}{1-q^{\frac{1}{2}}}\,{}_2\Phi_1(q,q^{\frac{1}{2}};q^{3/2};z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-q^{n-\frac{1}{2}}}$$

如以 $z^{\frac{1}{2}}$ 除 (8) 式，并以 q^2, $q\exp(2ix)$ 代 q, z (其中 x 为实数)，則級数的虛部变成

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+\frac{1}{2}}\sin(2n+1)x}{1-q^{2n+1}}=\frac{Kk}{2\pi}sn\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$$

$$=(\sin x)\,q^{\frac{1}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-2q^{2n}\cos 2x+q^{4n})(1+q^{2n-1})^2(1-q^{4n})^2}{(1-2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2})}$$

其中 $sn\,u$ 代表模为 k 的雅可比橢圓函数，而 k, K, q 的关系为

$$(9)\qquad q=\exp(-\pi K'/K)$$

$$(10)\qquad K=\tfrac{1}{2}\pi F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};1,k^2),\quad K'=\tfrac{1}{2}\pi F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};1,1-k^2).$$

这一結果是橢圓 θ-函数的一部分，見第 11 章．

在廣义超比級数的理論中有很多結果与基礎超比級数的理論相仿，特别是在良好地均衡的級数理論中如此．道格尔定理4-4(8)的类似式为

$$(11)\qquad {}_8\Phi_7\left[\begin{matrix}a,\ qa^{\frac{1}{2}},\ -qa^{\frac{1}{2}},\ b,\ c,\ d,\ e,\ q^{-N};\ q\\ a^{\frac{1}{2}},\ -a^{\frac{1}{2}},\ aq/b,\ aq/c,\ aq/d,\ aq/e,\ aq^{N+1}\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{(aq)_{q,N}(aq/cd)_{q,N}(aq/bd)_{q,N}(aq/bc)_{q,N}}{(aq/b)_{q,N}(aq/c)_{q,N}(aq/d)_{q,N}(aq/bcd)_{q,N}}$$

其中 $bcde=a^2q^{N+1}$, $N=1,2,3,\cdots$. 函数左边有四个元素 $qa^{\frac{1}{2}}$, $-qa^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{2}}$, $-a^{\frac{1}{2}}$的效果僅只是在級数的一般項中插入因式$(1-aq^{2n})/(1-a)$而已. 另一重要結果(与揮普耳定理相似)是華特生(1929)所証明的:

$$(12)\quad {}_8\Phi_7\begin{bmatrix} a, qa^{\frac{1}{2}}, -qa^{\frac{1}{2}}, c, d, e, f, g; a^2q^2/(cdefg) \\ a^{\frac{1}{2}}, -a^{\frac{1}{2}}, aq/c, aq/d, aq/e, aq/f, aq/g \end{bmatrix}$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-aq^n)(1-aq^n/fg)(1-aq^n/ge)(1-aq^n/ef)}{(1-aq^n/e)(1-aq^n/f)(1-aq^n/g)(1-aq^n/efg)}$$

$$\times{}_4\Phi_3\begin{bmatrix} aq/cd, e, f, g; q \\ efg/a, aq/c, aq/d \end{bmatrix}.$$

其他更一般的結果見 W. N. 巴萊(1935, 1936, 1947 a,b, 1948,a,b)的著作. 巴萊 (1947 a, 1948 b) 还作了敍述这一定理的討論.

在 (11) 的推論中有薩尔苏兴定理 4-4 (3), 高斯定理 2-1 (14) 及 2-9 (2) 定理的基本类似.

$${}_3\Phi_2\begin{bmatrix} b, c, q^{-N}; q \\ d, bcq^{1-N}/d \end{bmatrix}=\frac{(d/b)_{q,N}(d/c)_{q,N}}{(b)_{q,N}(d/bc)_{q,N}},$$

$${}_2\Phi_1\begin{bmatrix} b, c; d/bc \\ d \end{bmatrix}=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-dq^n/b)(1-dq^n/c)}{(1-dq^n)(1-dq^n/bc)},$$

$${}_2\Phi_1\begin{bmatrix} a, b; z \\ c \end{bmatrix}={}_1\Phi_0(ab/c; z)\,{}_2\Phi_1\begin{bmatrix} c/a, c/b; abz/c \\ c \end{bmatrix}.$$

从 (12) 中可導出一系列恆等式. 其中有欧拉恆等式

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[q^{\frac{1}{2}n(3n-1)}+q^{\frac{1}{2}n(3n+1)}]=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n),$$

有罗乔司-雷門尼雄恆等式

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}$$

$$=\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{1+5n})^{-1}(1-q^{4+5n})^{-1},$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n(n+1)}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}$$

$$=\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2+5n})^{-1}(1-q^{3+5n})^{-1},$$

及高斯的結果

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{\frac{1}{2}n(n+1)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}}\right).$$

其証明及其他結果見巴萊(1935)的著作.

康曼尔公式 2-8(47)的基本类似曾由道姆(1942)証明过.結果是

$$ {}_2\Phi_1\begin{bmatrix} a, b;\ -q/b \\ aq/b \end{bmatrix} $$

$$=\frac{\Omega(aq/b)\Omega(qa^{\frac{1}{2}})\Omega(-qa^{\frac{1}{2}})\Omega(-q/b)}{\Omega(aq)\Omega(-q)\Omega(qa^{\frac{1}{2}}/b)\Omega(-qa^{\frac{1}{2}}/b)},$$

其中

$$\Omega(z)=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1-q^{n-1}}{1-zq^{n}}.$$

参 考 文 献

Bailey, W. N., 1928: *Proc. London Math. Soc.* (2), 28, 242-254.

Bailey, W. N., 1929: *Proc. London Math. Soc.* (2), 29, 495-516.

Bailey, W. N., 1935: *Generalized hypergeometric series* (*Cambridge Tracts, No.* 32) Cambridge.

Bailey, W. N., 1936: *Quart. J. Math., Oxford Ser.* 7, 105-115.

Bailey, W. N., 1937: *Quart. J. Math., Oxford Ser.* 8, 113-114.

Bailey W. N., 1947 a: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 18, 157-166.

Bailey, W. N., 1947 b: *Proc. London Math. Soc.* (2) 49, 421-435.

Bailey, W. N., 1948 a *Proc. London Math. Soc.* (2) 50, 1-10.

Bailey. W. N., 1948 b: *J. London Math. Soc.* 22, 237-240.

Barnes, E. W., 1906: *Proc. London Math. Soc.* (2) 5, 59-116.

Bateman, Harry, 1933: *Tohoku Math. J.* 37, 23-38.

Bateman, Harry, 1934: *Ann. Math.* 35, 767-775.

Bateman Harry 1936: *Duke Math. J.* 2, 569-577.

Bose, B. N., 1914: *J. Indian Math. Soc.* (N. S.) 8, 120-123.

Burchnall, J. L., 1948: *J. London Math. Soc.* 23, 253-257.

Burchnall, J. L. and T. W. Chaundy, 1948: *Proc. London Math. Soc.* (2), 50, 56-74.

Chaundy, T. W. 1942: *Quart. J. Math., Oxford Ser.* 13, 159-171.

Chaundy, T. W., 1943: *Quart. J. Math., Oxford Ser.* 14, 55–78.

Clausen, Thomas, 1828: *J. Reine Angew. Math.*, 3, 89–91.

Darling, H. B. C., 1932: *Proc. London Math. Soc.* (2), 34, 323–339.

Daum J. A., 1942: *Bull. Amer. Math. Soc.* 48, 711–713.

Dixon, A. C., 1903: *Proc. London Math. Soc.*, (1) 35, 285–289.

Dougall, John., 1907: *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 25, 114–132.

Erdélyi, Arthur, 1937: *Quart. J. Math., Oxford Ser.* 8, 267–277.

Erdélyi, Arthur 1938: *Monatsh. Math. Phys.* 46, 132–156.

Erdélyi, Arthur, 1939: *Monatsh. Math. Phys.* 47, 87–103.

Fasenmyer, Mary Celine 1947: *Bull. Amer. Math. Soc.* 53, 806–812.

Goursat Édouard, 1883: *Ann. Sci. École Norm. Sup. Ser.* 2, 12, 261–285, 395–430.

Goursat, Édouard 1884: *Acta Math.* 5, 97–120.

Hardy G. H., 1923: *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 21, 492–503.

Heine, Emil, 1878: *Handbuch der Kugelfunktionen. Theorie und Anwendungen.* G. Riemer, Berlin.

Hill, M. J. M., 1907: *Proc. London Math. Soc.* (2) 5, 335–341.

Koppenfels, Werner von, 1937: *Akad. Wiss. Wien. S. B.* 146, 11–22.

Koppenfels, Werner von, 1939: *J. Reine Angew. Math.* 181, 83–124.

Krall H. L., and Orrin Frink 1949: *Trans. Amer. Math. Soc.* 65, 100–115.

MacRobert T. M. 1939: *Philos. Mag.* (7), 27, 579–581, and (7), 28, 488–492.

Mitra, S. C., 1942: *J. Indian Math. Soc.* (N. S.) 6, 84–86, and 81–83; see also *Math. Rev.* 4, 141.

Pasternack S., 1937: *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 23, 91–94.

Pasternack S., 1939: *Philos. Mag.* (7), 28, 209–226.

Pevnyi, B. G., 1940: *C. R. (Doklady) Acad. Sci. U. R. S. S.* (N. S.) 28, 310–312.

Pochhammer, Leo, 1870: *J. Reine Angew. Math.* 71, 316–352.

Pochhammer, Leo, 1871: *J. Reine Angew. Math.* 73, 135–157.

Pochhammer, Leo, 1888a: *Math. Ann.* 32, 353–371.

Pochhammer, Leo, 1888b: *J. Reine Angew. Math.* 102, 76–159.

Pochhammer, Leo, 1891: *Math. Ann.* 38, 586–597.

Pochhammer, Leo, 1893a: *Math. Ann.* 41, 197–218.

Pochhammer, Leo, 1893b: *J. Reine Angew. Math.* 112, 58–86.

Pochhammer, Leo, 1895: *Math. Ann.* 46, 584–605.

Pochhammer, Leo, 1898: *Math. Ann.* 50, 285–302.

Preece, C. T., 1924: *Proc. London Math. Soc.* (2), 22, 370–380.

Rainville, E. D., 1945: *Bull. Amer. Math. Soc.* 51, 714–723.

Rice, S. O., 1939: *Duke Math. J.* 6, 108–119.

Saalschütz, L. 1891: *Z. Math. u. Phys.* 36, 278–295, 321–327.

Shanker, Hari, 1946, *J. London Math. Soc.* 21, 194–198.

Shanker, Hari, 1947: *J. London Math. Soc.* 22, 112–115.

Smith, F. C., 1938: *Bull. Amer. Math. Soc.* 44, 429–433.

Smith, F. C., 1939: *Bull. Amer. Math. Soc.* 45, 629–636.

Thomae, J., 1869: *Math. Ann.* 2, 427–444.

Thomae, J., 1879: *J. Reine Angew. Math.* 87, 222–349.

Watson, G. N., 1924: *Proc. London Math. Soc.* (2), 22, XXXII–XXXIII.

Watson, G. N., 1929: *J. London Math. Soc.* 4, 4–9.

Whipple, F. J. W., 1925: *Proc. London Math. Soc.* (2), 23, 104–114.

Whipple, F. J. W., 1927: *Proc. London Math. Soc.* (2), 26, 257–272.

Whipple, F. J. W., 1935: *Proc. London Math. Soc.* (2), 40, 336–344.

Whipple, F. J. W., 1937: *Proc. London Math. Soc.* (2), 42, 410–421.

Whittaker, E. T., and G. N. Watson, 1927: *A course of modern analysis, fourth edition*, Cambridge.

Wright, E. M., 1935: *J. London Math. Soc.* 10, 287–293.

Wright, E. M., 1940: *Proc. London Math. Soc.* (2), 46, 389–408.

第五章　超比級数的進一步推廣

5-1. 各种推廣

經典超比級数

$$(1)\qquad F(\alpha,\beta;\gamma;x)=1+\frac{\alpha\beta}{1\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$$

引起了很多函数及級数的研究．在这一章里我們將集中討論通常作为超比函数的那些推廣．其他的推廣，例如麥日及拉美函数等將在別章中論述．

廣义超比級数

$$(2)\qquad {}_pF_q(a_1,\cdots,a_p;b_1,\cdots,b_p;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n,\cdots(a_p)_n}{(b_1)_n,\cdots(b_q)_n}\cdot\frac{x^n}{n!},$$

其中

$$(3)\qquad (a)_\nu=\frac{\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)},\ (a)_0=1,\ (a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1),$$

而且級数中的參数至少可使定义(3)中有一个具有意义，这种級数我們已在第四章中介紹过．現在我們將把(2)式作为一形式冪級数來討論，而不涉及其收斂問題．

通常我們把最普遍的(形式的)超比級数定义为一个形式冪級数，其相鄰两系数之比为一个(固定的)指标的有理函数．更正确点說，就是

$$(4)\qquad y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,\quad \frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{P(n)}{Q(n+1)},$$

其中 P 及 Q 均为多項式；設

$$Q(n+1)=(n+1)Q_1(n+1)$$

此处 Q_1 是多項式，使 $P(n)$ 及 $Q_1(n+1)$ 無公因式．P 及 Q_1 的次分别为 p 及 q．將 P 及 Q_1 分解为綫性因式立刻可使(4)式成为以符号 ${}_pF_q$ 表示的式子，因此，(2)在本質上是最普遍的(形式的)超比級数．

(4) 式所满足的微分方程可以用微分算符

(5) $\delta \equiv x \frac{d}{dx}$

寫出，$\delta x^n = n x^n$，因此对于任何具有常系数的多項式算符，$f(\delta) x^n = f(n) x^n$. 故 (4) 式所满足的微分方程为

(6) $\{x P(\delta) - Q(\delta)\} y = 0$，或 $\left\{ P(\delta) - \frac{d}{dx} Q_1(\delta) \right\} y = 0$，

这是 $\max(p, q+1)$ 階方程，如 $p \neq q+1$，則在 0 及 ∞ 具有奇点，如 $p = q+1$，則奇点在 0，∞ 及一个有限的第三点。

与这一廣义超比函数有关的有两个不同的問題：(i) 当 $p > q+1$ 时解釋公式 (2)，此时对于每一个 $x \neq 0$、級数均發散，(ii) 求出方程 (6) 在每一奇点鄰域中的基本解組。

進一步推廣可引出基礎超比函数，見第 4 章。

二个或二个以上变量的超比函数是同样定义的，見 5-7 節。

麥克罗勃特 E-函数

5-2. E-函数的定义

在 $p > q+1$ 的情况下，为了給符号 ${}_pF_q$ 以一个意义就產生了麥克罗勃特的 E-函数。当 $p \leqslant q+1$ 时，我們有

(1) $$E(p; \alpha_r : q; \rho_s : x) = \frac{\Gamma(\alpha_1) \cdots (\alpha_p)}{\Gamma(\rho_1) \cdots (\rho_q)}$$

$$\times {}_pF_q(\alpha_1, \cdots \alpha_p; \rho_1, \cdots \rho_q; -1/x)$$

式中 $p < q$ 时 $x \neq 0$，$p = q+1$ 时 $|x| > 1$.

对于 $p \geqslant q+1$，則

(2) $$E(p: \alpha_r : q; \rho_s : x) = \sum_{r=1}^{p} \frac{\prod_{s=1}^{p}{}' \Gamma(\alpha_s - \alpha_r)}{\prod_{t=1}^{q} \Gamma(\rho_t - \alpha_r)} \Gamma(\alpha_r) x^{\alpha_r}$$

$$\times {}_{q+1}F_{p-1} [\alpha_r, \alpha_r - \rho_1 + 1, \cdots, \alpha_r - \rho_q + 1;$$

$$\alpha_r - \alpha_1, \cdots, *, \cdots; \alpha_r - \alpha_p + 1; (-1)^{p+q} x]$$

式中 $p=q+1$ 时 $|x|<1$. II′ 上的一撇表示应除去一个因式 $\Gamma(\alpha_r-\alpha_r)$; F 中的星号 * 表示应除去参数 $\alpha_r-\alpha_r+1$; 一个空的積应作 1; α_r 的零值和負整数值是默認为排除的. 在本章的整个論述中,都有同样的約定. 对于 $x\to\infty$, $-\frac{1}{2}(p-q+1)\pi<\arg x<\frac{1}{2}(p-q+1)\pi$, (2) 式的漸近展开式卽为 (1) 式的右边部分. 本來 (MacRobert, 1937–1938), E 系由下面的重積分來定义:

$$(3)\qquad E(p;\alpha_r:q;\rho_s:x)=\frac{\Gamma(\alpha_{q+1})}{\Gamma(\rho_1-\alpha_1)\Gamma(\rho_2-\alpha_2)\cdots\Gamma(\rho_q-\alpha_q)}$$

$$\times\prod_{\mu=1}^{q}\int_0^\infty\lambda_\mu^{\rho_\mu-\alpha_\mu-1}(1+\lambda_\mu)^{-\rho_\mu}d\lambda_\mu$$

$$\times\prod_{\nu=2}^{p-q-1}\int_0^\infty e^{-\lambda_{q+\nu}}\lambda_{q+\nu}^{\alpha_{q+\nu}-1}d\lambda_{q+\nu}$$

$$\times\int_0^\infty e^{-\lambda_p}\lambda_p^{\alpha_p-1}\left[1+\frac{\lambda_{q+2}\lambda_{q+3}\cdots\lambda_p}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\cdots(1+\lambda_q)x}\right]^{-\alpha_{q+1}}d\lambda_p$$

其中 $|\arg x|<\pi$, $p\geqslant q+1$, 且 α_r 及 ρ_s 的选定可使積分收斂. 式 (2) 与式 (3) 的等价是可以証明的 (見 MacRobert, 1937–1938).

另外的有关函数是 P-函数, 它是在式 (2) 寫成如下形式时產生的:

$$(4)\qquad E(p;\alpha_r:q;\rho_s:x)=\sum_{r=1}^{p}P(\alpha_r;p-1;\alpha_s:q;\rho_t:x)$$

还有两个以 Q 及 H 表示的函数, 它們分别为 P 及 E 的多重形式 (MacRobert, 1937–1938). $E(p;\alpha_r:q;\rho_s:x)$ 的另一种記法是 $E(\alpha_1,\cdots,\alpha_p:\rho_1,\cdots,\rho_q:x)$.

利用第四章中導出的或引用的一些公式还可从 (1) 式中導出 E-函数的几种特殊情形. 从 (2) 及 (3) 式中可以引出另外几个有趣的特殊情形, 其中最重要的是第三类修正貝塞尔函数表达式:

$$(5)\qquad (2\pi x)^{\frac{1}{2}}K_\nu(x)=e^{-x}\cos(\nu\pi)E(\tfrac{1}{2}+\nu,\tfrac{1}{2}-\nu::2x)$$

[MacRobert 1937–1938 (12)] 及魏塔克尔的 W-函数:

$$(6)\qquad \Gamma(\tfrac{1}{2}-k-m)\Gamma(\tfrac{1}{2}-k+m)x^{-k}e^{\frac{1}{2}x}W_{k,m}(x)$$

$$=E(\tfrac{1}{2}-k-m,\tfrac{1}{2}-k+m::x)$$

[MacRobert 1941 (25)]. 值得注意的是 $W_{k,m}(x)W_{k,m}(-x)$ 也可以用 E-函数來表示 [MacRobert 1941, (15′)], 像能用其他組合表示一样. E-函数本身是梅杰 G-函数的一特殊情形.

5-2-1. 遞推关系

麥克罗勃特曾導出了一組基本的遞推公式 [MacRobert, 1941, 方程 (20) 至 (24)], 其中最重要的三个公式是

$$(7)\quad \begin{aligned}&\alpha_1 xE(\alpha_1,\cdots\alpha_p:\rho_1,\cdots\rho_q:x)\\ &=xE(\alpha_1+1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p:\rho_1,\cdots,\rho_q:x)\\ &+E(\alpha_1+1,\alpha_2+1,\cdots,\alpha_p+1:\rho_1+1,\cdots,\rho_q+1:x),\end{aligned}$$

$$(8)\quad \begin{aligned}&\frac{d}{dx}E(\alpha_1,\cdots,\alpha_p:\rho_1,\cdots,\rho_q:x)\\ &=x^{-2}E(\alpha_1+1,\cdots,\alpha_p+1:\rho_1+1,\cdots\rho_q+1:x),\end{aligned}$$

$$(9)\quad \begin{aligned}&(\rho_1-1)xE(\alpha_1,\cdots,\alpha_p:\rho_1,\cdots,\rho_q:x)\\ &=xE(\alpha_1,\cdots,\alpha_p:\rho_1-1,\rho_2,\cdots,\rho_q:x)\\ &+E(\alpha_1+1,\cdots,\alpha_p+1:\rho_1+1,\cdots,\rho_q+1:x).\end{aligned}$$

5-2-2. 積分式

有几个具有超比函数的積分可以用 E-函数來表示. 一个典型的例子 [見 MacRobert 1937–1938 (21)] 是:

$$(10)\quad \begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-x\lambda}\lambda^{\gamma-1}{}_2F_1(\alpha,\beta;\delta;-\lambda)\,d\lambda\\ &=\frac{\Gamma(\delta)x^{-\gamma}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}E(\alpha,\beta,\gamma:\delta:x)\qquad \operatorname{Re}x>0,\ \operatorname{Re}\gamma>0,\end{aligned}$$

上式可以这样來証明: 在等式的左边, 作代換

$$\begin{aligned}&{}_2F_1(\alpha,\beta;\delta;-\lambda)\\ &=\frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\delta-\beta)}\int_0^\infty \mu^{\delta-\beta-1}(1+\mu)^{-\delta}\left[1+\frac{\lambda}{(1+\mu)}\right]^{-\alpha}d\mu\end{aligned}$$

并利用公式 (3) 即可得公式 (10).

積分

$$\int_0^1 e^{ix\xi}{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;\xi)\,d\xi$$

可以用复数積分法計値;沿着一条圍綫進行積分,这条圍綫是一个矩形,其頂点在 0, 1, $1+ik$, ik $(k>0)$, 并刻鑿于 0 及 1, 而后应用(10)使刻鑿半徑趋近 0, $k\to\infty$ [見 MacRobert 1937–1938(23); 文中还提到另外几个積分式].

具有 E-函数的積分在麥克罗勃特 1941 的著作中有所論述. 其中最重要的是拉普拉斯或歐拉型積分,但也有几个更普遍的積分式. 典型例子是

$$(11)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} e^{\xi}\,\xi^{-\sigma}\,E(\alpha_1,\cdots\alpha_p:\rho_1,\cdots\rho_q:\xi x)\,d\xi$$
$$=E(\alpha_1,\cdots\alpha_p:\rho_1,\cdots,\rho_q,\sigma:x),\quad -\pi\leqslant\arg\xi\leqslant\pi,$$

$$(12)\quad \int_0^{\infty} e^{-\lambda}\lambda^{\beta-1}\,E(\alpha_1,\cdots,\alpha_p:\rho_1,\cdots,\rho_q:x/\lambda)\,d\lambda$$
$$=E(\alpha_1,\cdots\alpha_p,\beta:\rho_1,\cdots,\rho_q:x)\qquad \operatorname{Re}\beta>0.$$

$$(13)\quad \int_{-\infty}^{(0+)} e^{\xi}\,\xi^{\beta-1}\,E(\alpha_1,\cdots,\alpha_p:\rho_1,\cdots,\rho_q:x/\xi)\,d\xi$$
$$=e^{i\beta\pi}\,E(\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\beta:\rho_1,\cdots,\rho_q:xe^{-i\pi})$$
$$-e^{-i\beta\pi}\,E(\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\beta:\rho_1,\cdots,\rho_q:xe^{i\pi})$$

如 $p=q+1$, 則只要 $\xi=x$ 在迴綫内,上式即成立;如 $p<q$ 或 $p=q$ 且 $x>1$, 則上式的右側变为

$$2i\sin(\beta\pi)\,E(\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\beta:\rho_1,\cdots,\rho_q:-x).$$

$$(14)\quad \int_0^{\infty}\lambda^{\sigma-\beta-1}(1+\lambda)^{-\sigma}\,E[\alpha_1,\cdots,\alpha_p:\rho_1,\cdots,\rho_q:(1+\lambda)x]$$
$$=\Gamma(\sigma-\beta)\,E(\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\beta:\rho_1,\cdots,\rho_q,\sigma:x),$$
$$\operatorname{Re}(\beta)>0,\ \operatorname{Re}(\sigma-\beta)>0.$$

这些公式的証明以 E-函数的定义为基礎,(1)或(2)及(3)的应用根据 p 及 q 的値決定.

梅杰 G-函数

5–3. G-函数的定义

梅杰的 G-函数可以給記号 ${}_pF_q$ 在 $p>q+1$ 时以一种解釋;

这种解释是和麦克罗勃特的 E-函数所作的解釋完全一致的．此外，超比微分方程 5-1 (6) 的所有有效的特解均可以 G-函数來表示．

本來（Meijer 1936），G-函数是以类似于 5-2 (2) 式的形式來定义的．后來（Meijer 1941 c, 1946），这一定义被米林-巴尼斯型積分（見 1-19 節）所表示的形式代替．后一定义的优点是 p 与 q 的相对数値之間可以有較大的伸縮性．我們在这里將完成梅杰的定义，使之包含所有 p 及 q 的值，而对 m 及 n 不加任何（非普通的）限制．

我們定义

$$(1)\quad G_{p,q}^{m,n}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}a_1,\cdots,a_p\\ b_1,\cdots,b_q\end{matrix}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-s)}\,x^s\,ds$$

式中空的乘積作为 1，$0\leqslant m\leqslant q$，$0\leqslant n\leqslant p$，参数的选定可使沒有一个 $\Gamma(b_j-s)$，$j=1,\cdots,m$，的極与 $\Gamma(1-a_k+s)$，$k=1,\cdots,n$ 的任何極重合．这种假定在我們的全部敍述中都如此．由于在任何时候都不会引起誤解，所以我們可以寫得更簡單些

$$G_{pq}^{mn}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}a_r\\ b_s\end{matrix}\right),\quad G_{pq}^{mn}(x)\ \text{或簡單地}\ G(x).$$

積分圍綫 L 有三种不同的路徑：

(2)　L 由 $-i\infty$ 引至 $+i\infty$，因而 $\Gamma(b_j-s)$，$j=1,\cdots,m$ 的所有極都在 L 的右面，而所有 $\Gamma(1-a_k+s)$，$k=1,\cdots,n$ 的極都在 L 的左面．如 $p+q<2(m+n)$ 且 $|\arg x|<(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$ 則積分收斂．

(3)　L 是一个迴綫，起迄于 $+\infty$，在負方向内包圍 $\Gamma(b_j-s)$，$j=1,\cdots,m$ 的所有的極一次，但不圍繞 $\Gamma(1-a_k+s)$，$k=1,\cdots,n$ 的任何一个極．如 $q\geqslant 1$，或 $p<q$ 或 $p=q$，且 $|x|<1$ 則積分收斂．

(4)　L 是一个迴綫，起迄于 $-\infty$，在正方向内圍繞 $\Gamma(1-a_k+s)$，$k=1,\cdots,n$ 的所有的極一次，但不圍繞 $\Gamma(b_j-s)$，$j=1,\cdots,m$ 的任何一个極．如 $p\geqslant 1$，或 $p>q$ 或 $p=q$，且 $|x|>1$，則積分收斂．

我們將永远假定参数及变量 x 的值的选定至少使上面三个定义 (2)，(3)，(4) 中有一个成立．在上面三个定义中，如成立的不止一个，它們也將導出同一結果，不致有所含糊．

G-函数是 x 的解析函数，在参数 $a_1,\cdots,a_n$ 中、同样在 $a_{n+1},\cdots a_p$ 及 $b_1,\cdots,b_m$ 与 $b_{m+1},\cdots,b_q$ 中均为对称函数．

取圍綫 (3) 則積分可計值为留数之和．如 b_j，$j=1,\cdots m$ 中沒有二个相差一整数，則所有的極都是一階的，且

(5)
$$G_{pq}^{mn}\left(x\middle|\begin{matrix}a_r\\b_s\end{matrix}\right)$$
$$=\sum_{h=1}^{m}\frac{\prod_{j=1}^{m}{}'\Gamma(b_j-b_h)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1+b_h-a_j)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1+b_h-b_j)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-b_h)}x^{b_h}$$
$$\times{}_pF_{q-1}[1+b_h-a_1,\cdots,1+b_h-a_p;$$
$$1+b_h-b_1,\cdots,*,\cdots,1+b_h-b_q;(-1)^{p-m-n}x]$$
$$p<q \text{ 或 } p=q \text{ 且 } |x|<1.$$

同样如 a_k，$k=1,\cdots,n$ 中沒有二个相差一整数，由 (4) 可得

(6)
$$G_{pq}^{mn}\left(x\middle|\begin{matrix}a_r\\b_s\end{matrix}\right)$$
$$=\sum_{h=1}^{n}\frac{\prod_{j=1}^{n}{}'\Gamma(a_h-a_j)\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-a_h+1)}{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-a_h+1)\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(a_h-b_j)}x^{a_h-1}$$
$$\times{}_qF_{p-1}\left[\begin{matrix}1+b_1-a_h,\cdots,1+b_q-a_h;\\1+a_1-a_h,\cdots,*,\cdots,1+a_p-a_h;(-1)^{q-m-n}x^{-1}\end{matrix}\right]$$
$$q<p \text{ 或 } q=p \text{ 且 } |x|>1.$$

在这些展开式中，5-2 (2) 中的那些約定仍有效．

5-3-1. 簡單的恒等式

如 a_j, $j=1,\cdots n$, 中之一与 b_j, $j=m+1,\cdots q$ 中之一相等(或 b_j, $j=1,\cdots m$ 中之一与 a_j, $j=n+1,\cdots p$ 中之一相等),則 G-函数簡化为 p, q 及 n (以及 m) 減少 1 的一个較低階函数.

$$(7)\qquad G_{pq}^{mn}\left(x\left|\begin{matrix}a_1,\cdots,a_p\\ b_1,\cdots b_{q-1},a_1\end{matrix}\right.\right)=G_{p-1,q-1}^{m,n-1}\left(x\left|\begin{matrix}a_2,\cdots,a_p\\ b_1,\cdots,b_{q-1}\end{matrix}\right.\right)$$

$$n,\ p,\ q\geqslant 1.$$

就是这样一个簡化公式,所有其他的公式均类似.

在積分式 (1) 中,变量的顯著变更給出

$$(8)\qquad x^{\sigma}G_{pq}^{mn}\left(x\left|\begin{matrix}a_r\\ b_s\end{matrix}\right.\right)=G_{pq}^{mn}\left(x\left|\begin{matrix}b_r+\sigma\\ b_s+\sigma\end{matrix}\right.\right),$$

$$(9)\qquad G_{pq}^{mn}\left(x^{-1}\left|\begin{matrix}a_r\\ b_s\end{matrix}\right.\right)=G_{qp}^{nm}\left(x\left|\begin{matrix}1-b_s\\ 1-a_r\end{matrix}\right.\right),$$

$$(10)\qquad G_{pq}^{mn}\left(x\left|\begin{matrix}a_r\\ b_s\end{matrix}\right.\right)$$

$$=(2\pi)^{\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q-m-n}\,2^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q+1-a_1-\cdots-a_p+b_1+\cdots+b_q}$$

$$\times G_{2p,2q}^{2m,2n}\left(2^{2p-2q}x\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}a_r,\ \frac{1}{2}a_r+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}b_s,\ \frac{1}{2}b_s+\frac{1}{2}\end{matrix}\right.\right).$$

在 (10) 中應用到 γ-函数的加倍公式,还有一个相应的公式要用到 γ-函数的乘法公式 1-2 (11).

这些公式中最重要的是公式 (9),因为它可用以將 $p>q$ 的 G-函数变换为 $p<q$ 的 G-函数. 因此在所有討論中,我們假設 $p\leqslant q$ 就不失討論的普遍性. 其他十分顯然的关系式的例子有:

$$(11)\qquad (1-a_1+b_1)G_{pq}^{mn}\left(x\left|\begin{matrix}a_1,\cdots,a_p\\ b_1,\cdots,b_q\end{matrix}\right.\right)$$

$$=G_{pq}^{mn}\left(x\left|\begin{matrix}a_1-1,a_2,\cdots,a_p\\ b_1,b_2,\cdots,b_q\end{matrix}\right.\right)+G_{pq}^{mn}\left(x\left|\begin{matrix}a_1,a_2,\cdots,a_p\\ b_1+1,b_2,\cdots,b_q\end{matrix}\right.\right)$$

$$m,\ n\geqslant 1.$$

$$(12)\quad (a_p-a_1)G_{pq}^{mn}\left(x\left|\begin{matrix}a_1,\cdots,a_p\\b_1,\cdots,b_q\end{matrix}\right.\right)$$
$$=G_{pq}^{mn}\left(x\left|\begin{matrix}a_1-1,a_2,a_3,\cdots,a_p\\b_1,\cdots,b_q\end{matrix}\right.\right)$$
$$+G_{pq}^{mn}\left(x\left|\begin{matrix}a_1,\cdots,a_{p-1},a_p-1\\b_1,\cdots,b_q\end{matrix}\right.\right)\qquad 1\leqslant n\leqslant p-1,$$

$$(13)\quad x\frac{d}{dx}G_{pq}^{mn}\left(x\left|\begin{matrix}a_r\\b_s\end{matrix}\right.\right)=G_{pq}^{mn}\left(x\left|\begin{matrix}a_1-1,a_2,\cdots,a_p\\b_1,\cdots,b_q\end{matrix}\right.\right)$$
$$+(a_1-1)G_{pq}^{mn}\left(x\left|\begin{matrix}a_r\\b_s\end{matrix}\right.\right)\qquad n\geqslant 1,$$

$$(14)\quad G_{pq}^{mn}\left(x\left|\begin{matrix}a_r\\b_s\end{matrix}\right.\right)=\frac{1}{2\pi i}\left[e^{\pi ib_{m+1}}G_{pq}^{m+1,n}\left(xe^{-\pi i}\left|\begin{matrix}a_r\\b_s\end{matrix}\right.\right)\right.$$
$$\left.-e^{-\pi ib_{m+1}}G_{pq}^{m+1,n}\left(xe^{\pi i}\left|\begin{matrix}a_r\\b_s\end{matrix}\right.\right)\right]\qquad m\leqslant q-1,$$

$$G_{pq}^{mn}\left(x\left|\begin{matrix}a_r\\b_s\end{matrix}\right.\right)=\frac{1}{2\pi i}\left[e^{\pi ia_{n+1}}G_{pq}^{m,n+1}\left(xe^{-\pi i}\left|\begin{matrix}a_r\\b_s\end{matrix}\right.\right)\right.$$
$$\left.-e^{-\pi ia_{n+1}}G_{pq}^{m,n+1}\left(xe^{\pi i}\left|\begin{matrix}a_r\\b_s\end{matrix}\right.\right)\right]\qquad n\leqslant p-1.$$

5-4. 微分方程

由 5-3 (1) 可知 $G(x)$ 满足下面的微分方程:

$$(1)\quad \left[(-1)^{p-m-n}x\prod_{j=1}^{p}(\delta-a_j+1)-\prod_{j=1}^{q}(\delta-b_j)\right]y=0,\ \delta=x\frac{d}{dx}$$

顯然，每一个 5-2 (6)形式的微分方程在变换变量以后均可以導成上面的形式. 方程(1)的次数为 $\max(p,q)$, 根据 5-3 (9) 我們可以假設 $p\leqslant q$. (1) 式的解曾由梅杰 (1946) 研究过.

如 $p<q$, (1)的奇点只有 $x=0$、∞; $x=0$ 是正則奇点, $x=\infty$ 是非正則奇点. 在 $x=0$ 的鄰域内，方程(1)的 q 个綫性独立解的一个基本系为

$$(2)\quad G_{pq}^{1,p}\left(xe^{(p-m-n-1)\pi i}\left|\begin{matrix}a_1,\cdots,a_p\\b_h,b_1,\cdots,b_{h-1},b_{h+1},\cdots,b_q\end{matrix}\right.\right),h=1,\cdots,q.$$

对于非正則奇点的鄰域, x 应限制于一个扇形内，梅杰曾确定了两

个整数 k, g, 使

(3)　$|\arg x+(q-m-n-2k+1)\pi|<(\frac{1}{2}q-\frac{1}{2}p+1)\pi$

(4)　$|\arg x+(q-m-n-2h)\pi|<(q-p+\varepsilon)\pi$

$h=g, g+1, \cdots, g+q-p-1$, 如 $q=p+1$ 則 $\varepsilon=\frac{1}{2}$, 如 $q\geqslant p+2$. 則 $\varepsilon=1$. 因此, 如 x 在(3)及(4)式确定的扇形内, 則 p 个函数

(5)　$$G_{pq}^{q,1}\left(xe^{(q-m-n-2k+1)\pi}\,\middle|\,\begin{matrix}a_h, a_1, \cdots a_{h-1}, a_{h+1}, \cdots, a_p\\ b_1, \cdots, b_q\end{matrix}\right)$$

$h=1, \cdots, p$.

及 $q-p$ 个函数

(6)　$$G_{pq}^{q,0}\left(xe^{(q-m-n-2h)\pi}\,\middle|\,\begin{matrix}a_r\\ b_s\end{matrix}\right)\qquad h=g, g+1, \cdots, g+q-p+1.$$

就是方程 (1) 的解的基本系.

如 $p=q$, 則 $x=\infty$ 也是一个正則型的奇点, 根据条件 (3)、(5)式就是一个基本系. 在这种情况下, $x=(-1)^{p-m-n}$ 也是一个正則奇点, 但文献中还沒有給出这个奇点鄰域中的基本系.

若 $p>q$, 則应用 5-3 (9) 式可將微分方程導成上面討論过的情形; 此时 $x=0$ 及 $x=\infty$ 的情形將互調.

在任何情况下, 从方程 (1) 明顯地可以看出, 对于固定的 $p, q, a_1, \cdots, a_p, b_1, \cdots b_q$, 所有 $(p+1)(q+1)$ 个函数

(7)　$G_{pq}^{mn}[(-1)^{m+n}x]$　　$0\leqslant m\leqslant q,\ 0\leqslant n\leqslant p$.

滿足同一个微分方程.

5-4-1. 漸近展开式

我們將設 $p\leqslant q$; 对于 $p>q$ 的結果可从 5-3 (9) 式中將 $x=0$, $x=\infty$ 的情形互調后得出. 某些参数組合的整数值將剔除, 几种別的例外情形, 如漸近展开式控制項系数为零的情形, 也应排除.

$x=0$ 是微分方程 (1) 的一个奇点, 在这一奇点的鄰域中 $G(x)$ 的性态由公式 5-3 (5) 确定. 我們有, 当 $x\to 0$ 时,

(8)　$G_{pq}^{mn}(x)=O(|x|^{\beta})$,

式中 $p\leqslant q$, 对于 $h=1, 2, \cdots, m$, $\beta=\max\operatorname{Re}b_h$,

$x=\infty$ 是方程 (1) 的一个非正則奇点, 因此当 $x\to\infty$ 时 $G(x)$

的性态是非常复雜的．这种性态的研究是由巴尼斯开始的（1907及其他論文），别的作者（就中有 MacRobert，1937–1938）繼續了这种研究，而由 C. S. 梅杰（1946）所完成．詳細結果無法备載，此处只提一下其概要（見 Meijer 1946，§18）．

当 $x\to\infty$，如 $p<q$，且如

(9) $n\geqslant1,\ m+n>\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q,\ |\arg x|<(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$；

或如

(10) $q=p+1$，k 为某一整数，$|\arg x-(m+n-p+2k-1)\pi|<\frac{1}{2}\pi$

則 G-函数將有 x 某次冪的階．

当 $x\to\infty$，$p<q$，則如

(11) $m>\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q,\ n=0,\ |\arg x|<(m-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$

G-函数按指数降而等于零．

当 $x\to\infty$，$p<q$，則 G-函数在下面的区域中將按指数增而趋于無窮大．

(12) 如 $q\geqslant p+2$，則必有

(i) $m+n>\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q,\ |\arg x|>(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$

或者

(ii) $m+n\leqslant\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q$，$\arg x$ 不限制．

(13) 如 $q=p+1$，設 k 为一整数，并設

$$|\arg x-(m+n-p+2k)\pi|<\frac{1}{2}\pi$$

在这种情况下，必有

(i) $m+n\geqslant p+1$，$k\geqslant0$，或 $k\leqslant p-m-n$

或者

(ii) $m+n\leqslant p$，整数 k 不限制．

当 $p=q$，在 $x\to\infty$ 时 $G(x)$的性态可从 5-3(6)得出：此时它是 x 的一个冪．

更完全的，更詳細的結果可参看梅杰 1946 的著作 §18.

5-5. 級数和積分

G-函数的許多复雜的函数关系中最重要的是級数和積分关

系．G-函数的級数研究的比較少，但已知的積分式却是很多的．这里只举几个例子；其詳細情形，可參看原來的著作，大部分系 C. S. 梅杰所寫．

5-5-1．G-函数的級数

用 G-函数表示的級数展开式的第一組系由四乘法定理組成 (Meijer 1941 c)，

$$G_{pq}^{mn}\left(\lambda x\,\middle|\,\begin{matrix}a_1, \cdots, a_p\\ b_1, \cdots, b_q\end{matrix}\right)$$

(1)
$$=\lambda^{b_1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}(1-\lambda)^r G_{pq}^{mn}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}a_1, \cdots, a_p\\ b_1+r, b_2, \cdots, b_q\end{matrix}\right)$$
$$|\lambda-1|<1,\ m\geqslant 1.$$

(2)
$$=\lambda^{b_q}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}(\lambda-1)^r G_{pq}^{mn}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}a_1 \cdots, a_p\\ b_1, \cdots b_{q-1}, b_q+r\end{matrix}\right)$$
$$m<q,\ |\lambda-1|<1,$$

(3)
$$=\lambda^{a_1-1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^r G_{pq}^{mn}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}a_1-r, a_2, \cdots, a_p\\ b_1, \cdots, b_q\end{matrix}\right)$$
$$n\geqslant 1,\ \mathrm{Re}\,\lambda>\tfrac{1}{2}.$$

(4)
$$=\lambda^{a_p-1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)^r G_{pq}^{mn}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}a_1, \cdots, a_{p-1}, a_p-r\\ b_1, \cdots, b_q\end{matrix}\right)$$
$$n<p,\ \mathrm{Re}\,\lambda>\tfrac{1}{2}.$$

这些式子將 $G(\lambda x)$ 表示为 $G(x)$ 的無窮級数．如 $p<q$，$m=1$，则 (1) 式中的限制条件 $|\lambda-1|<1$ 可省去，同样当 $n=1$，$p>q$ 时，(3) 式中的限制亦可省去．

一些重要級数的第二組系由所謂展开公式 (Meijer 1946) 組成．这些公式可將 G-函数表示为具有相同的 p, q，但有不同的 m、n 的 G-函数的有限組合，在微分方程 5-4 (1) 的解的研究中很有用处．例如，第四展开公式在 $k, l, m, n, p, q, \mu, \nu$ 的適当条件下(見 Meijer 1946，定理 5) 可將 G_{pq}^{mn} 表成 ν 个 G_{pq}^{kl} 型函数，μ 个 $G_{pq}^{k,l-1}$ 型函数，及其他 $k-\mu-\nu$ 个同类型函数的綫性組合．

5-5-2. 具有 G-函数的積分式

最重要的積分式是那些在積分变换下表达出 G-函数性質的公式．欧拉变换式为

$$(5)\quad \int_0^1 y^{-\alpha}(1-y)^{\alpha-\beta-1} G_{pq}^{mn}\left(xy \left| \begin{matrix} a_1, \cdots, a_p \\ b_1, \cdots, b_q \end{matrix}\right.\right) dy = \Gamma(\alpha-\beta)\, G_{p+1,q+1}^{m,n+1}\left(x \left| \begin{matrix} \alpha, a_1, \cdots, a_p \\ b_1, \cdots, b_q, \beta \end{matrix}\right.\right)$$

这一公式当

$$(6)\quad p+q<2(m+n),\ |\arg x|<(m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\pi,$$

$$(7)\quad \mathrm{Re}\,\beta<\mathrm{Re}\,\alpha<\mathrm{Re}\,b_h+1 \qquad h=1, \cdots, m$$

时可从 5-3 (1) 中得到証明；对于 $p<q$ (或 $p=q$ 且 $|x|<1$)，在条件(7)的情形下可从 5-3 (5) 式中得到証明．設 α 等于 $b_{n+1}, \cdots, b_q$ 中的一个数，或 β 等于 $a_1, \cdots, a_n$ 中的一个数，則 (5) 即成为 G_{pq}^{mn} 的一个重要的函数方程．

在拉普拉斯变换下，G_{pq}^{mn} 的性态由下式給出

$$(8)\quad \int_0^\infty e^{-y} y^{-\alpha} G_{pq}^{mn}\left(xy \left| \begin{matrix} a_1, \cdots, a_p \\ b_1, \cdots, b_q \end{matrix}\right.\right) dy = G_{p+1,q}^{m,n+1}\left(x \left| \begin{matrix} \alpha, a_1, \cdots, a_p \\ b_1, \cdots, b_q \end{matrix}\right.\right)$$

这一公式，譬如説，在条件 (6) 及 (7) 之下有效，这些条件中有关于 β 的部分应略去．

在米林变换下，G-函数的性态可以从 5-3 (1) 式以条件 5-3 (2) 得出．G-函数乘積的某些積分可以用米林的乘積公式或拉普拉斯变换來計算．米林 (1936) 曾導出了几个这样的積分式．他还導出了 (5) 式的推廣式．

亨克尔变换是

$$(9)\quad \int_0^\infty y^{-\alpha} J_\nu(2y^{\frac{1}{2}})\, G_{pq}^{mn}\left(xy \left| \begin{matrix} a_1, \cdots, a_p \\ b_1, \cdots, b_q \end{matrix}\right.\right) dy = G_{p+2,q}^{m,n+1}\left(x \left| \begin{matrix} \alpha-\frac{1}{2}\nu, a_1, \cdots, a_p, \alpha+\frac{1}{2}\nu \\ b_1, \cdots, b_q \end{matrix}\right.\right)$$

这一公式，譬如説，可在条件 (6) 及

$$(10)\qquad \operatorname{Re}(-\alpha+\tfrac{1}{2}\nu+b_h)>-1 \qquad h=1,\cdots,m.$$
$$\operatorname{Re}(-\alpha+a_j)<\tfrac{1}{4} \qquad j=1,\cdots,n.$$

下有效.

在所有这些公式中引用迴綫積分可放寬所加于 α 的条件[在(5)式中为 β]. 其他使这些公式有效的条件当然也是可能的,但除了 C. S. 梅杰著作中的許多情形之外,这些条件并未明顯地給出.

一个最后包括(修正的)貝塞尔函数的積分式是

$$(11)\qquad \int_0^\infty y^{-\alpha}K_\nu(2y^{\frac{1}{2}})\,G_{pq}^{mn}\left(xy\,\middle|\,\begin{matrix}a_1,\cdots,a_p\\ b_1,\cdots,b_q\end{matrix}\right)dy$$
$$=\tfrac{1}{2}\,G_{p+2,q}^{m,n+2}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}\alpha-\frac{1}{2}\nu,\ \alpha+\frac{1}{2}\nu,\ a_1,\cdots,a_p\\ b_1,\cdots,b_q\end{matrix}\right)$$

这一公式,举例說,在条件(6)及

$$(12)\qquad \operatorname{Re}(-\alpha\pm\tfrac{1}{2}\nu-b_h)>-1 \qquad h=1,\cdots,m.$$

下有效.

更好的条件曾由梅杰[1936, 方程(58)]在一特殊情况下導出.

5-6. G-函数的特殊情形

顯然

$$(1)\qquad {}_pF_q(a_1,\cdots,a_p;b_1,\cdots,b_q;x)$$
$$=\frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j)}\,G_{p,q+1}^{1,p}\left(-x\,\middle|\,\begin{matrix}1-a_1,\cdots,1-a_p\\ 0,1-b_1,\cdots,1-b_q\end{matrix}\right)$$
$$=\frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j)}\,G_{q+1,p}^{p,1}\left(-\frac{1}{x}\,\middle|\,\begin{matrix}1,b_1,\cdots,b_q\\ a_1,\cdots,a_p\end{matrix}\right)$$

比較 5-2 (2) 及 5-3 (5) 式可得

$$(2)\qquad E(p;\alpha_r:q;\beta_s:x)$$
$$=G_{q+1,p}^{p,1}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}1,\beta_1,\cdots,\beta_q\\ \alpha_1,\cdots,\alpha_p\end{matrix}\right)$$

G-函数之所以重要主要在于应用 G-符号可將很多应用数学中的特殊函数表达出來，因此，所導出的每一个 G-函数公式都是主導公式，从这些公式中可導出貝塞尔、勒让特、魏塔克尔函数、它們的組合及其他有关函数之間的很多关系．下面所列特殊 G-函数表主要系由 C. S. 梅杰的几篇著作中摘錄出來．

(3) $G_{02}^{10}(x\,|\,a,b)=x^{\frac{1}{2}(a+b)}J_{a-b}(2x^{\frac{1}{2}})$

(4) $G_{02}^{20}(x\,|\,a,b)=2x^{\frac{1}{2}(a+b)}K_{a-b}(2x^{\frac{1}{2}})$

(5) $G_{12}^{20}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ b,-b\end{matrix}\right)=\pi^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x}K_b(\tfrac{1}{2}x)$

(6) $G_{12}^{20}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}a\\ b,c\end{matrix}\right)=x^{\frac{1}{2}(b+c-1)}e^{-\frac{1}{2}x}W_{k,m}(x)$

$$k=\tfrac{1}{2}(1+b+c)-a,\ m=\tfrac{1}{2}b-\tfrac{1}{2}c$$

(7) $G_{12}^{21}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ b,-b\end{matrix}\right)=\dfrac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\cos b\pi}e^{\frac{1}{2}x}K_b(\tfrac{1}{2}x)$

(8) $G_{12}^{21}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}a\\ b,c\end{matrix}\right)=\Gamma(b-a+1)\Gamma(c-a+1)x^{\frac{1}{2}(b+c-1)}e^{\frac{1}{2}x}W_{k,m}(x)$

$$k=a-\tfrac{1}{2}(b+c+1),\ m=\tfrac{1}{2}b-\tfrac{1}{2}c$$

(9) $G_{04}^{10}(x\,|\,a,b,2b-a,2b-a+\tfrac{1}{2})=\pi^{-\frac{1}{2}}x^{b}$
$\times I_{2(a-b)}(2^{3/2}x^{\frac{1}{4}})J_{2(a-b)}(2^{3/2}x^{\frac{1}{4}})$

(10) $G_{04}^{10}(x\,|\,a+\tfrac{1}{2},a,b,2a-b)=\pi^{-\frac{1}{2}}[\sin(a-b)\pi]^{-1}2^{-5/2}$
$\times x^{a}[J_{2(a-b)}(2^{3/2}x^{\frac{1}{4}})I_{2(b-a)}(2^{3/2}x^{\frac{1}{4}})-I_{2(a-b)}(2^{3/2}x^{\frac{1}{4}})$
$\times J_{2(b-a)}(2^{3/2}x^{\frac{1}{4}})]$

(11) $G_{04}^{20}(x\,|\,a,a+\tfrac{1}{2},b,b+\tfrac{1}{2})=x^{\frac{1}{2}(a+b)}J_{2(a-b)}(4x^{\frac{1}{4}})$

(12) $G_{04}^{20}(x\,|\,a,-a,0,\tfrac{1}{2})=-\pi^{\frac{1}{2}}(\sin 2a\pi)^{-1}$
$\times[J_{2a}(ze^{\pi i/4})J_{2a}(ze^{-\pi i/4})-J_{-2a}(ze^{\pi i/4})J_{-2a}(ze^{-\pi i/4})]$

$$z=2^{3/2}x^{1/4}$$

(13) $G_{04}^{20}(x\,|\,0,\tfrac{1}{2},a,-a)=\pi^{\frac{1}{2}}i^{-1}(\sin 2a\pi)^{-1}$
$\times[e^{2a\pi i}J_{2a}(ze^{-\pi i/4})J_{-2a}(ze^{\pi i/4})-e^{-2a\pi i}J_{2a}(ze^{\pi i/4})$
$\times J_{-2a}(ze^{-\pi i/4})]$ $\qquad z=2^{3/2}x^{\frac{1}{4}}$

(14) $G_{04}^{30}(x\,|\,3a-\tfrac{1}{2},a,-a-\tfrac{1}{2},a-\tfrac{1}{2})=2\pi^{\frac{1}{2}}(\cos 2a\pi)^{-1}$
$\times x^{a-\frac{1}{2}}K_{4a}(2^{3/2}x^{\frac{1}{4}})[J_{4a}(2^{3/2}x^{\frac{1}{4}})+J_{-4a}(2^{3/2}x^{\frac{1}{4}})]$

(15) $G^{30}_{04}\left(x\middle|0,\, a-\frac{1}{2},\, -a-\frac{1}{2},\, -\frac{1}{2}\right)=4\pi^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{4}}$
$\times K_{2a}(z)\left[J_{2a}(z)\cos a\pi - Y_{2a}(z)\sin a\pi\right]$

$z=2^{3/2}x^{\frac{1}{4}}$.

(16) $G^{30}_{04}\left(x\middle|-\frac{1}{2},\, a-\frac{1}{2},\, -a-\frac{1}{2},\, 0\right)=-4\pi^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{4}}$
$\times K_{2a}(z)\left[J_{2a}(z)\sin a\pi + Y_{2a}(z)\cos a\pi\right],\qquad z=2^{3/2}x^{\frac{1}{4}}.$

(17) $G^{30}_{04}\left(x\middle|a,\, b+\frac{1}{2},\, b,\, 2b-a\right)=\pi^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}}x^{b}K_{2(a-b)}\left(2^{3/2}x^{\frac{1}{4}}\right)$
$\times J_{2(a-b)}\left(2^{3/2}x^{\frac{1}{4}}\right)$

(18) $G^{40}_{04}\left(x\middle|a,\, a+\frac{1}{2},\, b,\, b+\frac{1}{2}\right)=4\pi x^{\frac{1}{2}(a+b)}K_{2(a-b)}\left(4x^{\frac{1}{4}}\right)$

(19) $G^{40}_{04}\left(x\middle|a,\, a+\frac{1}{2},\, b,\, 2a-b\right)=2^{3}\pi^{\frac{1}{2}}x^{a}$
$\times K_{2(b-a)}\left(2^{3/2}x^{\frac{1}{4}}e^{\pi i/4}\right)K_{2(b-a)}\left(2^{3/2}x^{\frac{1}{4}}e^{-\pi i/4}\right)$

(20) $G^{11}_{13}\left(x\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ a,\, 0,\, -a\end{matrix}\right)=\pi^{\frac{1}{2}}J_{a}^{2}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$

(21) $G^{11}_{13}\left(x\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ 0,\, a,\, -a\end{matrix}\right)=\pi^{\frac{1}{2}}J_{a}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)J_{-a}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$

(22) $G^{11}_{13}\left(x\middle|\begin{matrix}a\\ a,\, b,\, a-\frac{1}{2}\end{matrix}\right)=x^{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}}\mathbf{H}_{a-b-\frac{1}{2}}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)$

(23) $G^{20}_{13}\left(x\middle|\begin{matrix}a-\frac{1}{2}\\ a,\, b,\, a-\frac{1}{2}\end{matrix}\right)=x^{\frac{1}{2}(a+b)}Y_{b-a}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)$

(24) $G^{20}_{13}\left(x\middle|\begin{matrix}a+\frac{1}{2}\\ b,\, a,\, 2a-b\end{matrix}\right)=-\pi^{\frac{1}{2}}x^{a}J_{b-a}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)Y_{b-a}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$

(25) $G^{20}_{13}\left(x\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ a,\, -a,\, 0\end{matrix}\right)=\pi^{\frac{1}{2}}2^{-1}(\sin a\pi)^{-1}\left[J^{2}_{-a}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)-J^{2}_{a}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\right]$

(26) $G^{21}_{13}\left(x\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ a,\, 0,\, -a\end{matrix}\right)=2\pi^{\frac{1}{2}}I_{a}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)K_{a}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$

(27) $G^{21}_{13}\left(x\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ a,\, -a,\, 0\end{matrix}\right)=\pi^{3/2}(\sin 2a\pi)^{-1}\left[I^{2}_{-a}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)-I^{2}_{a}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\right]$

(28) $G^{21}_{13}\left(x\middle|\begin{matrix}a+\frac{1}{2}\\ a+\frac{1}{2},\, b,\, a\end{matrix}\right)=\frac{\pi x^{\frac{1}{2}(a+b)}}{\cos(a-b)\pi}\left[I_{b-a}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)L_{a-b}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)\right]$

(29) $G^{21}_{13}\left(x\middle|\begin{matrix}a+\frac{1}{2}\\ a,\, a+\frac{1}{2},\, b\end{matrix}\right)=\pi x^{\frac{1}{2}(a+b)}\left[I_{a-b}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)-L_{a-b}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)\right]$

(30) $G^{30}_{13}\left(x\middle|\begin{matrix}a+\frac{1}{2}\\ a+b,\, a-b,\, 0\end{matrix}\right)=2\pi^{-\frac{1}{2}}x^{a}K^{2}_{b}\left(x^{\frac{1}{2}}\right).$

(31) $$G^{31}_{13}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}a+\frac{1}{2}\\ a-\frac{1}{2},\ -a,\ a\end{matrix}\right)=\frac{\pi^2}{\cos 2a\pi}\left[\mathbf{H}_{2a}(2x^{\frac{1}{2}})-Y_{2a}(2x^{\frac{1}{2}})\right]$$

(32) $$G^{31}_{13}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}a\\ a,b,-b\end{matrix}\right)=2^{-2a+2}\Gamma(1-a-b)\Gamma(1-a+b)S_{2a-1,2b}(2x^{\frac{1}{2}})$$

(33) $$G^{31}_{13}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}a+\frac{1}{2}\\ b,\ 2a-b,\ a\end{matrix}\right)=\pi^{5/2}2^{-1}[\cos(b-a)\pi]^{-1}$$
$$\times x^a H^{(1)}_{b-a}(x^{\frac{1}{2}})\,H^{(2)}_{b-a}(x^{\frac{1}{2}})$$

(34) $$G^{12}_{22}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}a-1,\ -b,\\ -c_1,\ -c_2\end{matrix}\right)=\frac{\Gamma(a+c_1)\Gamma(a+c_2)}{\Gamma(a+b)}$$
$$\times x^{a-1}{}_2F_1(a+c_1,\ a+c_2;\ a+b;\ -x)$$

(35) $$G^{12}_{24}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}a+\frac{1}{2},\ a\\ b+a,\ a-c,\ a+c,\ a-b\end{matrix}\right)=\pi^{\frac{1}{2}}x^a J_{b+c}(x^{\frac{1}{2}})J_{b-c}(x^{\frac{1}{2}})$$

(36) $$G^{22}_{24}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}a,\ a+\frac{1}{2}\\ b,\ c,\ 2a-c,\ 2a-b\end{matrix}\right)=2\pi^{\frac{1}{2}}x^a I_{b+c-2a}(x^{\frac{1}{2}})K_{b-c}(x^{\frac{1}{2}})$$

(37) $$G^{30}_{24}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}0,\ \frac{1}{2}\\ a,\ b,\ -b,\ -a\end{matrix}\right)=i2^{-2}\pi^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\left[H^{(1)}_{a-b}(x^{\frac{1}{2}})H^{(1)}_{a+b}(x^{\frac{1}{2}})-H^{(2)}_{a-b}(x^{\frac{1}{2}})H^{(2)}_{a+b}(x^{\frac{1}{2}})\right]$$

(38) $$G^{40}_{24}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}+a,\ \frac{1}{2}-a\\ 0,\ \frac{1}{2},\ b,\ -b\end{matrix}\right)=\pi^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{4}}W_{a,b}(2x^{\frac{1}{2}})\ W_{-a,b}(2x^{\frac{1}{2}})$$

(39) $$G^{40}_{24}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}a,\ a+\frac{1}{2}\\ a+b,\ a+c,\ a-c,\ a-b\end{matrix}\right)=2\pi^{-\frac{1}{2}}x^a K_{b+c}(x^{\frac{1}{2}})K_{b-c}(x^{\frac{1}{2}})$$

(40) $$G^{41}_{24}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}0,\ \frac{1}{2}\\ a,\ b,\ -b,\ -a\end{matrix}\right)=\frac{-2^{-2}\pi^{5/2}}{i\sin a\pi\sin b\pi}$$
$$\times\left[e^{-b\pi i}H^{(1)}_{a-b}(x^{\frac{1}{2}})H^{(2)}_{a+b}(x^{\frac{1}{2}})-e^{b\pi i}H^{(1)}_{a+b}(x^{\frac{1}{2}})H^{(2)}_{(a-b)}(x^{\frac{1}{2}})\right]$$

(41) $$G^{41}_{24}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2},\ 0\\ a,\ b,\ -b,\ -a\end{matrix}\right)=\frac{2^{-2}\pi^{5/2}}{\cos a\pi\cos b\pi}$$
$$\times\left[e^{-b\pi i}H^{(1)}_{a-b}(x^{\frac{1}{2}})H^{(2)}_{a+b}(x^{\frac{1}{2}})+e^{b\pi i}H^{(1)}_{a+b}(x^{\frac{1}{2}})H^{(2)}_{a-b}(x^{\frac{1}{2}})\right]$$

(42) $$G^{41}_{24}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}+a,\ \frac{1}{2}-a\\ 0,\ \frac{1}{2},\ b,\ -b\end{matrix}\right)=x^{-\frac{1}{4}}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\tfrac{1}{2}+b-a)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}-b-a)$$
$$\times W_{a,b}(2ix^{\frac{1}{2}})\,W_{a,b}(-2ix^{\frac{1}{2}})$$

(43) $$G^{14}_{44}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}a-1, & -c_1, & -c_2, & -c_3\\ -b_1, & -b_2, & -b_3, & -b_4\end{matrix}\right)=\frac{\prod_{h=1}^{4}\Gamma(a+b_h)}{\prod_{h=1}^{3}\Gamma(a+c_h)}x^{a-1}$$

$$\times {}_4F_3(a+b_1, a+b_2, a+b_3, a+b_4; a+c_1, a+c_2, a+c_3; -x)$$

下面是可用 G-函数來表示的特殊函數組合中的一部分:

(44) $$x^{\mu}J_{\nu}(x)=2^{\mu}G^{10}_{02}\left(\tfrac{1}{4}x^2\,\middle|\,\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\mu, \tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\nu\right)$$

(45) $$x^{\mu}J_{\nu}(x)=4^{\mu}G^{20}_{04}\left(4^{-4}x^4\,\middle|\,\tfrac{1}{4}\nu+\tfrac{1}{4}\mu, \tfrac{1}{4}\nu+\tfrac{1}{4}\mu+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\mu-\tfrac{1}{4}\nu, \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\mu-\tfrac{1}{4}\nu\right)$$

(46) $$x^{\mu}Y_{\nu}(x)=2^{\mu}G^{20}_{13}\left(\tfrac{1}{4}x^2\,\middle|\,\begin{matrix}\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}\\ \tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\nu, \tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\nu, \tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}\end{matrix}\right)$$

(47) $$x^{\mu}K_{\nu}(x)=2^{\mu-1}G^{20}_{02}\left(\tfrac{1}{4}x^2\,\middle|\,\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\nu, \tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\nu\right)$$

(48) $$x^{\mu}K_{\nu}(x)=4^{\mu-1}\pi^{-1}$$
$$\times G^{40}_{04}\left(4^{-4}x^4\,\middle|\,\tfrac{1}{4}\nu+\tfrac{1}{4}\mu, \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\nu+\tfrac{1}{4}\mu, -\tfrac{1}{4}\nu+\tfrac{1}{4}\mu, \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\nu+\tfrac{1}{4}\mu\right)$$

(49) $$e^{-x}K_{\nu}(x)=\pi^{\frac{1}{2}}G^{20}_{12}\left(2x\,\middle|\,\begin{matrix}\tfrac{1}{2}\\ \nu, -\nu\end{matrix}\right)$$

(50) $$e^{x}K_{\nu}(x)=\pi^{-\frac{1}{2}}\cos\nu\pi\, G^{21}_{12}\left(2x\,\middle|\,\begin{matrix}\tfrac{1}{2}\\ \nu, -\nu\end{matrix}\right)$$

(51) $$x^{\mu}\mathbf{H}_{\nu}(x)=2^{\mu}G^{11}_{13}\left(\tfrac{1}{4}x^2\,\middle|\,\begin{matrix}\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\mu\\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\mu, \tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\nu, \tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\nu\end{matrix}\right)$$

(52) $$\mathbf{H}_{\nu}(x)-Y_{\nu}(x)=\pi^{-2}\cos\nu\pi\, G^{31}_{13}\left(\tfrac{1}{4}x^2\,\middle|\,\begin{matrix}\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu\\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu, \tfrac{1}{2}\nu\end{matrix}\right)$$

(53) $$x^{\mu}[I_{\nu}(x)-\boldsymbol{L}_{\nu}(x)]$$
$$=\pi^{-1}2^{\mu}G^{21}_{13}\left(\tfrac{1}{4}x^2\,\middle|\,\begin{matrix}\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\\ \tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\nu, \tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\nu\end{matrix}\right)$$

(54) $$x^{\mu}[I_{-\nu}(x)-\boldsymbol{L}_{\nu}(x)]$$
$$=\pi^{-1}2^{\mu}\cos\nu\pi\, G^{21}_{13}\left(\tfrac{1}{4}x^2\,\middle|\,\begin{matrix}\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\mu\\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}\mu, \tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{1}{2}\nu, \tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}\nu\end{matrix}\right)$$

(55) $$S_{\mu,\nu}(x)=2^{\mu-1}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu\right)}$$
$$\times G_{13}^{31}\left(\tfrac{1}{4}x^2\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu,\ \frac{1}{2}\nu,\ -\frac{1}{2}\nu\end{matrix}\right)$$

(56) $$J_\nu^2(x)=\pi^{-\frac{1}{2}}G_{13}^{11}\left(x^2\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ \nu,\ 0,\ -\nu\end{matrix}\right)$$

(57) $$J_\nu(x)\,J_{-\nu}(x)=\pi^{-\frac{1}{2}}G_{13}^{11}\left(x^2\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ 0,\ \nu,\ -\nu\end{matrix}\right)$$

(58) $$x^\sigma J_\mu(x)\,J_\nu(x)$$
$$=\pi^{-\frac{1}{2}}G_{24}^{12}\left[x^2\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sigma,\ \frac{1}{2}\sigma\\ \frac{1}{2}(\mu+\nu+\sigma),\ \frac{1}{2}(\nu+\sigma-\mu),\ \frac{1}{2}(\mu+\sigma-\nu),\ \frac{1}{2}(\sigma-\mu-\nu)\end{matrix}\right]$$

(59) $$x^\mu I_\nu(x)\,J_\nu(x)$$
$$=\pi^{\frac{1}{2}}2^{3\mu/2}G_{04}^{10}\left(\frac{x^4}{64}\,\middle|\,\tfrac{1}{4}\mu+\tfrac{1}{2}\nu,\ \tfrac{1}{4}\mu-\tfrac{1}{2}\nu,\ \tfrac{1}{4}\mu,\ \tfrac{1}{4}\mu+\tfrac{1}{2}\right)$$

(60) $$x^\mu J_\nu(x)\,Y_\nu(x)=-\pi^{-\frac{1}{2}}G_{13}^{20}\left(x^2\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu\\ \nu+\frac{1}{2}\mu,\ \frac{1}{2}\mu,\ \frac{1}{2}\mu-\nu\end{matrix}\right)$$

(61) $$I_\nu(x)\,K_\nu(x)=2^{-1}\pi^{-\frac{1}{2}}G_{13}^{21}\left(x^2\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ \nu,\ 0,\ -\nu\end{matrix}\right)$$

(62) $$x^\mu K_\nu(x)\,J_\nu(x)=\pi^{-\frac{1}{2}}2^{3\mu/2-1}$$
$$\times G_{04}^{30}\left(\frac{1}{64}x^4\,\middle|\,\tfrac{1}{4}\mu+\tfrac{1}{2}\nu,\ \tfrac{1}{4}\mu+\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4}\mu,\ \tfrac{1}{4}\mu-\tfrac{1}{2}\nu\right)$$

(63) $$x^\sigma I_\nu(x)\,K_\mu(x)=2^{-1}\pi^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times G_{24}^{22}\left[x^2\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}\sigma,\ \frac{1}{2}\sigma+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}(\nu+\mu+\sigma),\ \frac{1}{2}(\nu+\sigma-\mu),\ \frac{1}{2}(\mu+\sigma-\nu),\ \frac{1}{2}(\sigma-\nu-\mu)\end{matrix}\right]$$

(64) $$x^\mu H_\nu^{(1)}(x)\,H_\nu^{(2)}(x)=\pi^{-5/2}\,2\cos\nu\pi$$
$$\times G_{13}^{31}\left(x^2\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu\\ \frac{1}{2}\mu+\nu,\ \frac{1}{2}\mu-\nu,\ \frac{1}{2}\mu\end{matrix}\right)$$

(65) $$x^\mu K_\nu^2(x)=2^{-1}\pi^{\frac{1}{2}}G_{13}^{30}\left(x^2\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu\\ \nu+\frac{1}{2}\mu,\ -\nu+\frac{1}{2}\mu,\ 0\end{matrix}\right)$$

(66) $$x^\sigma K_\nu(x)\,K_\mu(x)=2^{-1}\pi^{\frac{1}{2}}$$
$$\times G_{24}^{40}\left[x^2\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}\sigma,\ \frac{1}{2}\sigma+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}(\nu+\mu+\sigma),\ \frac{1}{2}(\nu+\sigma-\mu),\ \frac{1}{2}(\mu+\sigma-\nu),\ \frac{1}{2}(\sigma-\nu-\mu)\end{matrix}\right]$$

(67) $$x^{2\mu}K_{2\nu}(xe^{\pi i/4})K_{2\nu}(xe^{-\pi i/4})=2^{3\mu-3}\pi^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times G_{04}^{40}\left(\frac{1}{64}x^4\,\middle|\,\tfrac{1}{2}\mu,\ \tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}\mu+\nu,\ \tfrac{1}{2}\mu-\nu\right)$$

(68) $$x^l e^{-\frac{1}{2}x}W_{k,m}(x)=G_{12}^{20}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}l-k+1\\ m+l+\frac{1}{2},\ l-m+\frac{1}{2}\end{matrix}\right)$$

(69) $$x^l e^{\frac{1}{2}x}W_{k,m}(x)=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)\Gamma(\frac{1}{2}-m-k)}$$
$$\times G_{12}^{21}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}k+l+1\\ l-m+\frac{1}{2},\ m+l+\frac{1}{2}\end{matrix}\right)$$

(70) $$e^{-\frac{1}{2}x}W_{k,m}(x)=\pi^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}2^{k-\frac{1}{2}}$$
$$\times G_{24}^{40}\left(2^{-2}x^2\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{4}-\frac{1}{2}k,\ \frac{3}{4}-\frac{1}{2}k\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}m,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}m,\ \frac{1}{2}m,\ -\frac{1}{2}m\end{matrix}\right)$$

(71) $$e^x W_{k,m}(2x)=\frac{x^{\frac{1}{2}}2^{-(k+1)}\pi^{-3/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)\Gamma(\frac{1}{2}-m-k)}$$
$$\times G_{24}^{42}\left(x^2\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{4}+\frac{1}{2}k,\ \frac{3}{4}+\frac{1}{2}k\\ \frac{1}{2}m,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}m,\ -\frac{1}{2}m,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}m\end{matrix}\right)$$

(72) $$x^l W_{k,m}(2ix)W_{k,m}(-2ix)=\frac{x\pi^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)\Gamma(\frac{1}{2}-m-k)}$$
$$\times G_{24}^{41}\left(x^2\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}l+k,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}l-k\\ \frac{1}{2}l,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}l,\ \frac{1}{2}l+m,\ \frac{1}{2}l-m\end{matrix}\right)$$

(73) $$x^l W_{k,m}(x)W_{-k,m}(x)=\pi^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times G_{24}^{40}\left(\tfrac{1}{4}x^2\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2}l+k+1,\ \frac{1}{2}l-k+1\\ \frac{1}{2}l+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}l+1,\ \frac{1}{2}l+m+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}l-m+\frac{1}{2}\end{matrix}\right)$$

(74) $${}_2F_1(a;b,c;-x)=\frac{\Gamma(c)x}{\Gamma(a)\Gamma(b)}G_{22}^{12}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}-1,\ -c\\ -a,\ -b\end{matrix}\right)$$

(75) $${}_4F_3(a,b,c,d;e,f,l;-z)=\frac{\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(l)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)\Gamma(d)}z$$
$$\times G_{44}^{14}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}-1,\ -e,\ -f,\ -l\\ -a,\ -b,\ -c,\ -d\end{matrix}\right).$$

其他类似的公式在梅杰的著作特别是勒上特函数及各种廣义超比函数公式中可以找到。

多变量超比函数

5-7. 兩变量的超比級数

單变量超比級数理論上的重大成就引起了两变量及多变量超比級数理論的研究. 1880 年阿貝尔定义了四个級数 F_1 至 F_4 [見下面的方程 (6) 至 (9)], 它們与高斯的 $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ 相似. 畢卡第曾指出这些級数之一是和波希亨准在 1870 年所研究的函数密切关联的, 畢卡第与戈尔薩特还創立了阿貝尔級数的一个定理, 类似于高斯超比級数的黎曼定理. P. 漢貝特曾研究过两个变量的合流超比級数. 法國学校成就的說明連同最初文献的参考資料在阿貝尔和康拜·特·范利 (1926) 所作的專論中可以找到, 这就是关于这一問題的标准作品. 这篇作品中还列出了迄至 1926 年为止有关文件的很完备的一篇目錄; 本章的參考目錄大体上是阿貝尔和康拜·特·范利目錄的补充.

賀恩 (1889) 作出了如下的一般定义: 二重冪級数

$$\sum_{m, n=0}^{\infty} A_{mn} x^m y^n \tag{1}$$

中如两个商

$$\frac{A_{m+1, n}}{A_{mn}} = f(m, n), \quad \frac{A_{m, n+1}}{A_{mn}} = g(m, n) \tag{2}$$

是 m, n 的有理函数, 则 (1) 就是一个超比級数. 賀恩曾研究了两变量超比級数的收斂問題, 并建立了它們所滿足的偏微方程組.

对于我們在上面業已提到过的几位作者, 以及米林和其他作者所研究的特殊超比函数來說, A_{mn} 是一个 γ-乘積, 也就是說它具有如下的形式:

$$\gamma_{mn} = \prod_i \Gamma(a_i + u_i m + v_i n) / \Gamma(a_i) \tag{3}$$

其中 a_i 是任意常数(实数或复数), u_i 及 v_i 是任意整数, 可以为正, 为負或为零. 由此而發生的問題是这一类型的級数, 是否是合乎賀恩定义的一个最普遍式. 顯然, 对于所有的 $m, n = 0, 1, 2, \cdots$, f, g 应滿足条件

(4) $\quad f(m, n) g(m+1, n)=f(m, n+1) g(m, n)$

由于上式两边都是 $A_{m+1, n+1}/A_{mn}$，故对 m 及 n 是恆等的；从此容易看出任何 m, n 的有理函数組只要滿足条件 (4) 就產生一个超比級数.

柏克蘭指出 (1927) 函数方程 (4)的每一个有理解都可以分解为綫性因式，这样似可引出 A_{mn} 的 γ-乘積. 沃里注意到(1929)柏克蘭定理不是完全普遍性的，它作出了(4)式有理解的一个徹底的分析. 从沃里的結果中可知 A_{mn} 的最普遍形式为

$$A_{mn}=R(m, n) \gamma_{mn} a^{m} b^{n}$$

其中 R 是 m 及 n 的一个固定的有理函数，a, b 是常数. γ_{mn} 是 γ-乘積. 这就是説两变量的最普遍的超比級数是有理微分算符

$$R\left(x \frac{\partial}{\partial x}, \ y \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

在如下形式的超比級数

$$\sum \gamma_{mn}(a x)^{m}(b y)^{n}$$

上运算时所得的結果.

因此，研究一下賀恩-柏克蘭型的級数似已足夠了.

5-7-1. 賀恩公式表

賀恩令

(5) $\quad f(m, n)=\dfrac{F(m, n)}{F'(m, n)}, \quad g(m, n)=\dfrac{G(m, n)}{G'(m, n)}$

其中 F, F', G, G' 都是 m, n 的多項式，多項式的次数分别为 p, p', q, q'. F' 假設为具有一个因式 $m+1$, G' 具有一个因式 $n+1$; F 及 F' 除了可能有 $m+1$ 外沒有公因式，G 及 G' 除了可能有 $n+1$ 外也沒有公因式. 四数 p, p', q, q' 中的最大的一个就是超比級数的階数. 賀恩特别研究了二階超比級数并發現除了某些級数可用單变量超比級数表示或是二个單变量超比級数的相乘積之外，主要有 34 个不同的二階收斂級数(Horn, 1931. Borngässer 1933 加以校正).

对于 $p=p'=q=q'=2$，共有 14 个完全級数：

$$(6)\qquad F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x,y)=\sum\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}m!\,n!}x^m y^n,$$

$$(7)\qquad F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma',x,y)=\sum\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_m(\gamma')_n m!\,n!}x^m y^n,$$

$$(8)\qquad F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma,x,y)=\sum\frac{(\alpha)_m(\alpha')_n(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}m!\,n!}x^m y^n,$$

$$(9)\qquad F_4(\alpha,\beta,\gamma,\gamma',x,y)=\sum\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_{m+n}}{(\gamma)_m(\gamma')_n m!\,n!}x^m y^n,$$

$$(10)\qquad G_1(\alpha,\beta,\beta',x,y)=\sum\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_{n-m}(\beta')_{m-n}}{m!\,n!}x^m y^n,$$

$$(11)\qquad G_2(\alpha,\alpha',\beta,\beta',x,y)=\sum\frac{(\alpha)_m(\alpha')_n(\beta)_{n-m}(\beta')_{m-n}}{m!\,n!}x^m y^n,$$

$$(12)\qquad G_3(\alpha,\alpha',x,y)=\sum\frac{(\alpha)_{2n-m}(\alpha')_{2m-n}}{m!\,n!}x^m y^n,$$

$$(13)\qquad H_1(\alpha,\beta,\gamma,\delta,x,y)=\sum\frac{(\alpha)_{m-n}(\beta)_{m+n}(\gamma)_n}{(\delta)_m m!\,n!}x^m y^n,$$

$$(14)\qquad H_2(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,x,y)=\sum\frac{(\alpha)_{m-n}(\beta)_m(\gamma)_n(\delta)_n}{(\varepsilon)_m m!\,n!}x^m y^n,$$

$$(15)\qquad H_3(\alpha,\beta,\gamma,x,y)=\sum\frac{(\alpha)_{2m+n}(\beta)_n}{(\gamma)_{m+n}m!\,n!}x^m y^n,$$

$$(16)\qquad H_4(\alpha,\beta,\gamma,\delta,x,y)=\sum\frac{(\alpha)_{2m+n}(\beta)_n}{(\gamma)_m(\delta)_n m!\,n!}x^m y^n,$$

$$(17)\qquad H_5(\alpha,\beta,\gamma,x,y)=\sum\frac{(\alpha)_{2m+n}(\beta)_{n-m}}{(\gamma)_n m!\,n!}x^m y^n,$$

$$(18)\qquad H_6(\alpha,\beta,\gamma,x,y)=\sum\frac{(\alpha)_{2m-n}(\beta)_{n-m}(\gamma)_n}{m!\,n!}x^m y^n,$$

$$(19)\qquad H_7(\alpha,\beta,\gamma,\delta,x,y)=\sum\frac{(\alpha)_{2m-n}(\beta)_n(\gamma)_n}{(\delta)_m m!\,n!}x^m y^n,$$

还有 20 个合流級数，它們是完全級数的極限形式，对于这 20 个合流級数，$p\leq p'=2$，$q\leq q'=2$，且 p，q 不同时 $=2$：

$$(20)\quad \Phi_1(\alpha, \beta, \gamma, x, y)=\sum \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_n}{(\gamma)_{m+n}\, m!\, n!} x^m y^n \qquad |x|<1,$$

$$(21)\quad \Phi_2(\beta, \beta', \gamma, x, y)=\sum \frac{(\beta)_m(\beta')_m}{(\gamma)_{m+n}\, m!\, n!} x^m y^n,$$

$$(22)\quad \Phi_3(\beta, \gamma, x, y)=\sum \frac{(\beta)_m}{(\gamma)_{m+n}\, m!\, n!} x^m y^n,$$

$$(23)\quad \Psi_1(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y)=\sum \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m}{(\gamma)_m(\gamma')_n\, m!\, n!} x^m y^n \qquad |x|<1,$$

$$(24)\quad \Psi_2(\alpha, \gamma, \gamma', x, y)=\sum \frac{(\alpha)_{m+n}}{(\gamma)_m(\gamma')_n\, m!\, n!} x^m y^n,$$

$$(25)\quad \Xi_1(\alpha, \alpha', \beta, \gamma, x, y)=\sum \frac{(\alpha)_m(\alpha')_n(\beta)_m}{(\gamma)_{m+n}\, m!\, n!} x^m y^n \qquad |x|<1,$$

$$(26)\quad \Xi_2(\alpha, \beta, \gamma, x, y)=\sum \frac{(\alpha)_m(\beta)_n}{(\gamma)_{m+n}\, m!\, n!} x^m y^n \qquad |x|<1,$$

$$(27)\quad \Gamma_1(\alpha, \beta, \beta', x, y)=\sum \frac{(\alpha)_m(\beta)_{n-m}(\beta')_{m-n}}{m!\, n!} x^m y^n \qquad |x|<1,$$

$$(28)\quad \Gamma_2(\beta, \beta', x, y)=\sum \frac{(\beta)_{n-m}(\beta')_{m-n}}{m!\, n!} x^m y^n,$$

$$(29)\quad H_1(\alpha, \beta, \delta, x, y)=\sum \frac{(\alpha)_{m-n}(\beta)_{m+n}}{(\delta)_m\, m!\, n!} x^m y^n \qquad |x|<1,$$

$$(30)\quad H_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x, y)=\sum \frac{(\alpha)_{m-n}(\beta)_m(\gamma)_n}{(\delta)_m\, m!\, n!} x^m y^n \qquad |x|<1,$$

$$(31)\quad H_3(\alpha, \beta, \delta, x, y)=\sum \frac{(\alpha)_{m-n}(\beta)_m}{(\delta)_m\, m!\, n!} x^m y^n \qquad |x|<1,$$

$$(32)\quad H_4(\alpha, \gamma, \delta, x, y)=\sum \frac{(\alpha)_{m-n}(\gamma)_n}{(\delta)_m\, m!\, n!} x^m y^n,$$

$$(33)\quad H_5(\alpha, \delta, x, y)=\sum \frac{(\alpha)_{m-n}}{(\delta)_m\, m!\, n!} x^m y^n,$$

$$(34)\quad H_6(\alpha, \gamma, x, y)=\sum \frac{(\alpha)_{2m+n}}{(\gamma)_{m+n}\, m!\, n!} x^m y^n \qquad |x|<\tfrac{1}{4},$$

$$(35)\quad H_7(\alpha, \gamma, \delta, x, y)=\sum \frac{(\alpha)_{2m+n}}{(\gamma)_m(\delta)_n\, m!\, n!} x^m y^n \qquad |x|<\tfrac{1}{4},$$

(36) $H_8(\alpha, \beta, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{2m-n}(\beta)_{n-m}}{m!\, n!} x^m y^n \qquad |x| < \frac{1}{4},$

(37) $H_9(\alpha, \beta, \delta, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{2m-n}(\beta)_n}{(\delta)_m m!\, n!} x^m y^n \qquad |x| < \frac{1}{4},$

(38) $H_{10}(\alpha, \delta, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{2m-n}}{(\delta)_m m!\, n!} x^m y^n \qquad |x| < \frac{1}{4},$

(39) $H_{11}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{m-n}(\beta)_n(\gamma)_n}{(\delta)_m m!\, n!} x^m y^n \qquad |y| < 1.$

在所有这些二重級数中 m 及 n 均由 0 至 ∞.

5-7-2. 級数的收斂性

在二重冪級数 $\Sigma A_{mn} x^m y^n$ 中,如果級数当 $|x| < r$, $|y| < s$ 时絕对收斂而当 $|x| > r$, $|y| > s$ 时發散,則称两正数 r, s 为該級数的締合收斂半徑. 令 $\max r = R$, $\max s = S$. 在絕对平面 (r, s) 中,表示締合收斂半徑的点位于一曲綫 C 上,这一曲綫全部包含在矩形 $0 < r < R$, $0 < s < S$ 中,并分矩形为两部,其中包含 $r = s = 0$ 的一部分就是二重冪級数收斂域的二維表示.

賀恩在研究 (1) 的收斂性时定义

(40) $\Phi(\mu, \nu) = \lim f(\mu t, \nu t)$, $\Psi(\mu, \nu) = \lim g(\mu t, \nu t) \qquad t \to \infty.$

并証明 $R = |\Phi(1, 0)|^{-1}$, $S = |\Psi(0, 1)|^{-1}$, 而且 C 的参数方程为 $r = |\Phi(\mu, \nu)|^{-1}$, $s = |\Psi(\mu, \nu)|^{-1}$, 其中 $\mu, \nu > 0$.

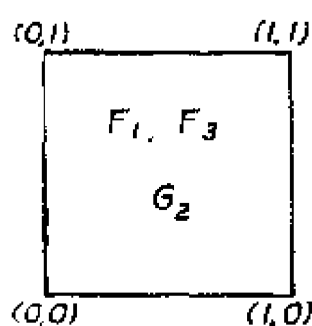
將这些引用到两階完全級数上,就可得出下表:

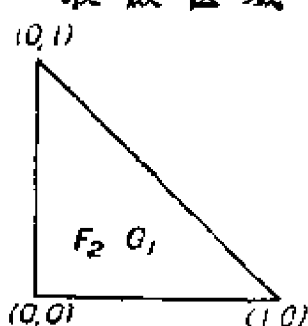
級	数	$\Phi(\mu, \nu)$	$\Psi(\mu, \nu)$	C 的笛卡兒坐标方程
(41)	F_1	1	1	
(42)	F_2	$\frac{\mu+\nu}{\mu}$	$\frac{\mu+\nu}{\nu}$	$r+s=1$
(43)	F_3	$\frac{\mu}{\mu+\nu}$	$\frac{\nu}{\mu+\nu}$	
(44)	F_4	$\left(\frac{\mu+\nu}{\mu}\right)^2$	$\left(\frac{\mu+\nu}{\nu}\right)^2$	$r^{\frac{1}{2}}+s^{\frac{1}{2}}=1$

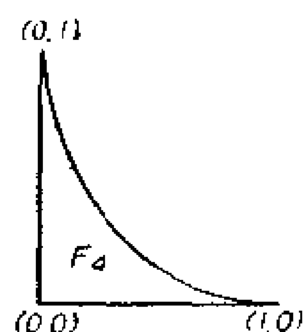
級	数	$\Phi(\mu,\nu)$	$\Psi(\mu,\nu)$	C 的笛卡兒坐标方程
(45)	G_1	$\frac{-(\mu+\nu)}{\mu}$	$\frac{-(\mu+\nu)}{\nu}$	$r+s=1$
(46)	G_2	-1	-1	
(47)	G_3	$\frac{(2\mu-\nu)^2}{\mu(2\nu-\mu)}$	$\frac{(2\nu-\mu)^2}{\nu(2\mu-\nu)}$	$27r^2s^2+18rs \pm 4(r-s)-1=0$
(48)	H_1	$\frac{\mu^2-\nu^2}{\mu^2}$	$\frac{\mu+\nu}{\mu-\nu}$	$4rs=(s-1)^2$
(49)	H_2	$\frac{\mu-\nu}{\mu}$	$\frac{\nu}{\mu-\nu}$	$-r+s^{-1}=1$
(50)	H_3	$\frac{(2\mu+\nu)^2}{\mu(\mu+\nu)}$	$\frac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}$	$r+(s-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$
(51)	H_4	$\frac{(2\mu+\nu)^2}{\mu^2}$	$\frac{2\mu+\nu}{\nu}$	$4r=(s-1)^2$
(52)	H_5	$\frac{(2\mu+\nu)^2}{\mu(\nu-\mu)}$	$\frac{(2\mu+\nu)(\nu-\mu)}{\nu^2}$	$1+16r^2-36rs \pm(8r-s+27rs^2)=0$
(53)	H_6	$\frac{(2\mu-\nu)^2}{\mu(\nu-\mu)}$	$\frac{\nu-\mu}{2\mu-\nu}$	$s^2r+s-1=0$
(54)	H_7	$\frac{(2\mu-\nu)^2}{\mu^2}$	$\frac{\nu}{2\mu-\nu}$	$4r=(s^{-1}-1)^2$

各个級数的收斂域可表示如下：

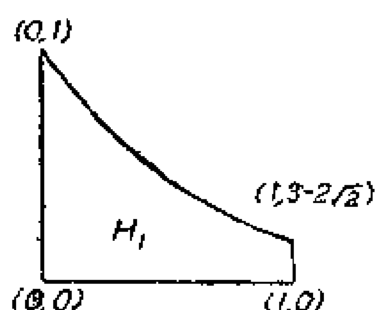
收 斂 区 域

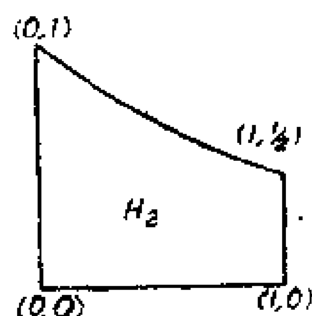


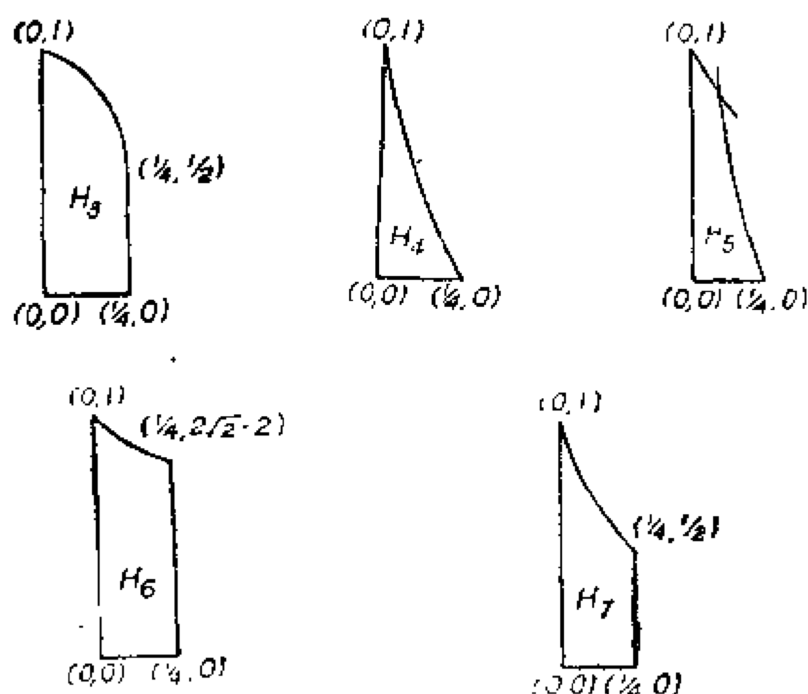












在合流級数的情形中，Φ 及 Ψ 有一个恆等于零，收斂区域就相当簡單，任何保証收斂的必要不等式列出在公式(20)至(39)中.

5-8. 積分表示式

像單变量函数一样，二变量的超比函数基本上可用欧拉-拉普拉斯型或米林-巴尼斯型定積分來表示. 米林-巴尼斯型定積分引出的無疑地是重積分，而具有初等被積函数的欧拉-拉普拉斯型定積分大部分也將引出重積分. 由于重積分相当难于处理，且在微分方程的積分上并不十分適用，因此必須找出一些單積分來表示二变量超比函数. 这种表示法在每一种情况下都是可以办到的，但在大部分情形下被積函数將包含一單变量超比函数或甚至包含若干个这种函数的積.

賀恩表中所列函数太多，这里不可能列出其全部積分表示式；我們所引只以阿貝尔函数的積分表示式为限，所有賀恩函数都与此相似，而且大部分都可在本章末所列的参考文献中找到. 積分表示式在研究二变量超比級数的解析开拓，变換理論及偏微方程超比組的積分时是有用的.

5-8-1. 欧拉型重積分

下面的積分表示式可以用第一类β-函数的欧拉積分或对应的重積分从二变量超比級数中很容易地得出(見 Appell 与 Kampé de Fériet 1926, 第 II 章):

(1) $$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta-\beta')}$$

$$\times\iint_{\substack{u\geq 0,\, v\geq 0\\ u+v\leq 1}} u^{\beta-1}v^{\beta'-1}(1-u-v)^{\gamma-\beta-\beta'-1}(1-ux-vy)^{-\alpha}du\,dv$$

$$\operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\beta'>0,\ \operatorname{Re}(\gamma-\beta-\beta')>0,$$

(2) $$F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';x,y)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma'-\beta')}$$

$$\times\int_0^1\int_0^1 u^{\beta-1}v^{\beta'-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-v)^{\gamma'-\beta'-1}(1-ux-vy)^{-\alpha}du\,dv$$

$$\operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\beta'>0,\ \operatorname{Re}(\gamma-\beta)>0,\ \operatorname{Re}(\gamma'-\beta')>0,$$

(3) $$F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma;x,y)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta-\beta')}$$

$$\times\iint_{\substack{u\geq 0,\, v\geq 0\\ u+v\leq 1}} u^{\beta-1}v^{\beta'-1}(1-u-v)^{\gamma-\beta-\beta'-1}(1-ux)^{-\alpha}(1-vy)^{-\alpha'}du\,dv$$

$$\operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\beta'>0,\ \operatorname{Re}(\gamma-\beta-\beta')>0.$$

函数 F_4 較难运算,而且似乎沒有十分簡單的積分表示式. 在各种已知的重積分中,貝契納尔和宗台 [1940, 方程 (68)] 所提出的積分式也許是最簡單的了.

(4) $$F_4[\alpha,\beta,\gamma,\gamma';x(1-y),y(1-x)]$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma'-\beta)}$$

$$\times\int_0^1\int_0^1 u^{\alpha-1}v^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-v)^{\gamma'-\beta-1}(1-ux)^{\alpha-\gamma-\gamma'+1}$$

$$\times(1-vy)^{\beta-\gamma-\gamma'+1}(1-ux-vy)^{\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-1}du\,dv$$

$$\operatorname{Re}(\alpha)>0,\ \operatorname{Re}(\beta)>0,\ \operatorname{Re}(\gamma-\alpha)>0,\ \operatorname{Re}(\gamma'-\beta)>0.$$

在所有这些積分式中我們都設定 $|x|$ 及 $|y|$ 是夠小,因而級数及積分都是收斂的.

5-8-2. 欧拉型單積分

畢卡第曾指出 F_1 可以用如下形式的單積分來表示

(5) $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$

$$=^{*}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'}du$$

$\operatorname{Re}\alpha>0, \operatorname{Re}(\gamma-\alpha)>0.$

这个表示式有一个極大的优点，它可以很容易轉換为对任的 $\operatorname{Re}\alpha$ 及 $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha)$ 有效的圍綫積分，而且在有关 F_1 的偏微方程組的完全積分方面是一个最好的工具．方程(5)提供了一个將 F_1 用欧拉变換分解为 x 的函数与 y 的函数的因式分解法，式(5)的最大用处就在于此．

对于 F_2 及 F_3 也有相应的关系式 (Erdélyi, 1948)

(6) $$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; x, y)=\frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\rho')\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi i)^2}$$

$$\times\int(-t)^{\rho}(t-1)^{-\rho'}F(\rho, \beta;\gamma;x/t)F[\rho',\beta';\gamma';y/(1-t)]dt.$$

其中 $\rho+\rho'=\alpha+1$，積分圍道是一波奇亨木的二重迴綫 $(1+, 0+, 1-, 0-)$，沿着这条迴綫有 $|t|>|x|$，$|1-t|>|y|$；

(7) $$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma; x, y)=(2\pi i)^{-2}\Gamma(1-\rho)\Gamma(1-\rho')\Gamma(\gamma)$$

$$\times\int^{(1+, 0+, 1-, 0-)}(-t)^{\rho-1}(t-1)^{\rho'-1}$$

$$\times F(\alpha, \beta; \rho; tx)\, F[\alpha', \beta'; \rho'; (1-t)y]\, dt.$$

式中 $\rho+\rho'=\gamma$．在任一情形下，ρ 的特殊选擇可將被積函数中一个超比函数簡化为初等函数，但对于参数的一般数值，就不可能將整个被積函数簡化为初等函数．

沒有一个已知的單積分可以分解函数 F_4，这就再度証明函数 F_4 較其同类函数难于运算．但在另一方面，下面的積分表示式 [Erdélyi, 1941, 方程 (3)]，是較为簡單而且在有 F_4 的偏微方程組的積分上是有用的：

---

* 此处原文作 $\times\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}$

$$(8)\quad F_4(\alpha,\beta,\gamma,\gamma';x,y)=(2\pi i)^{-2}\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')\Gamma(2-\gamma-\gamma')$$
$$\times\int^{(1+,0+,1-,0-)}(-t)^{-\gamma}(t-1)^{-\gamma'}F[\alpha,\beta;\gamma+\gamma'+1;$$
$$x/t+y/(1-t)]\,dt,$$
在閉道上，$|x/t+y/(1-t)|<1$.

5-8-3. 米林-巴尼斯型重積分

阿貝尔和康拜·特·范利的四个積分表示式可以总結为

$$(9)\quad \Phi(x,y)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(2\pi i)^2}$$
$$\times\int_{-i\infty}^{i\infty}\int_{-i\infty}^{i\infty}\Psi(s,t)\Gamma(-s)\Gamma(-t)(-x)^s(-y)^t\,ds\,dt.$$

其中積分閉道是与普通一样刻鏨的（見 2-1-3 節）。Φ 及 Ψ 在四种情形下为：

	$\Phi(x,y)$	$\Psi(s,t)$
(10)	$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+s+t)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\beta'+t)}{\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma+s+t)}$
(11)	$F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';x,y)$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+s+t)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\beta'+t)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma+s)\Gamma(\gamma'+t)}$
(12)	$F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma;x,y)$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\alpha'+t)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\beta'+t)}{\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma+s+t)}$
(13)	$F_4(\alpha,\beta,\gamma,\gamma';x,y)$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+s+t)\Gamma(\beta+s+t)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\gamma+s)\Gamma(\gamma'+t)}$

这种类型的積分是米林在研究超比函数中所用的.

5-9. 偏微方程組

級数 $\Sigma A_{mn}x^m y^n$，其中 $A_{m+1,n}/A_{mn}=F(m,n)/F'(m,n)$，$A_{m,n+1}/A_{mn}=G(m,n)/G'(m,n)$，$F,F',G,G'$ 均为多項式，如 5-7 (5) 式所示，这一級数滿足一綫性偏微方程組，如以微分算符

$$(1)\quad \delta=x\frac{\partial}{\partial x},\quad \delta'=y\frac{\partial}{\partial y}$$

表示，方程組形为

$$(2)\qquad [F'(\delta,\delta')\,x^{-1}-F(\delta,\delta')]\,z=0,$$
$$[G'(\delta,\delta')\,y^{-1}-G(\delta,\delta')]\,z=0.$$

由于我們所討論的只限于二階超比函数，在这种情形下我們將有二个二階的偏微方程．

这两个方程肯定是相容的（由于超比級数同时滿足这两个方程），从这种方程組的一般理論（見，例如，Appell 及 Kampé de Fériet 1926 的著作第 III 章）可知它們最多有四个，可能少于四个的公共綫性独立解．更精密的研究表明与 Horn 表上八个級数

$$(3)\qquad F_1,\ G_1,\ G_2,\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3,\ \Gamma_1,\ 与\ \Gamma_2$$

連帶的偏微方程組只有三个綫性独立解，而所有其余 26 个組則每組有四个独立解．不过，在与

$$(4)\qquad G_3,\ H_3,\ H_6,\ \mathrm{H}_6,\ \mathrm{H}_8$$

連系的方程組中有一个解是比較普通的初等函数，形如 $x^\rho y^\sigma$，其中 ρ 及 σ 的值如下表所示：

級	数	ρ	σ
(5)	G_3	$-\frac{1}{3}(\alpha+2\alpha')$	$-\frac{1}{3}(2\alpha+\alpha')$
(6)	H_3, H_6	$\gamma-\alpha-1$	$\alpha-2\gamma+2$
(7)	H_6, H_8	$-\alpha-\beta$	$-\alpha-2\beta$

在下面的偏微方程表中 z 是 x 及 y 的未知函数．

$$(8)\qquad p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

$$(9)\qquad \left.\begin{aligned}&x(1-x)r+y(1-x)s+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]p\\&\quad-\beta yq-\alpha\beta z=0\\&y(1-y)t+x(1-y)s+[\gamma-(\alpha+\beta'+1)y]q\\&\quad-\beta' xp-\alpha\beta' z=0\end{aligned}\right\}F_1,$$

$$(10)\qquad \left.\begin{aligned}&x(1-x)r-xys+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]p-\beta yq-\alpha\beta z=0\\&y(1-y)t-xys+[\gamma'-(\alpha+\beta'+1)y]q-\beta' xp\\&\quad-\alpha\beta' z=0\end{aligned}\right\}F_2.$$

$$(11)\quad \left.\begin{aligned}&x(1-x)r+ys+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]p-\alpha\beta z=0\\&y(1-y)t+xs+[r-(\alpha'+\beta'+1)y]q-\alpha'\beta' z=0\end{aligned}\right\}F_3,$$

$$(12)\quad \left.\begin{aligned}&x(1-x)r-y^2t-2xys+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]p\\&\quad-(\alpha+\beta+1)yq-\alpha\beta z=0\\&y(1-y)t-x^2r-2xys+[\gamma'-(\alpha+\beta+1)y]q\\&\quad-(\alpha+\beta+1)xp-\alpha\beta z=0\end{aligned}\right\}F_4,$$

$$(13)\quad \left.\begin{aligned}&x(1+x)r-ys-y^2t+[1-\beta+(\alpha+\beta'+1)x]p\\&\quad+(\beta'-\alpha-1)yq+\alpha\beta' z=0\\&y(y+1)t-xs-x^2r+[1-\beta'+(\alpha+\beta+1)y]q\\&\quad+(\beta-\alpha-1)xp+\alpha\beta z=0\end{aligned}\right\}G_1,$$

$$(14)\quad \left.\begin{aligned}&x(1+x)r-y(1+x)s+[1-\beta+(\alpha+\beta'+1)x]p\\&\quad-\alpha yq+\alpha\beta' z=0\\&y(1+y)t-x(1+y)s+[1-\beta'+(\alpha'+\beta+1)y]q\\&\quad-\alpha' xp+\alpha'\beta z=0\end{aligned}\right\}G_2,$$

$$(15)\quad \left.\begin{aligned}&x(1+4x)\gamma-(4x+2)ys+y^2t+[1-\alpha+(4\alpha'+6)x]p\\&\quad-2\alpha' yq+\alpha'(\alpha'+1)z=0\\&y(1+4y)t-x(4y+2)s+x^2r+[1-\alpha'+(4\alpha+6)y]q\\&\quad-2\alpha xp+\alpha(\alpha+1)z=0\end{aligned}\right\}G_3,$$

$$(16)\quad \left.\begin{aligned}&x(1-x)r+y^2t+[\delta-(\alpha+\beta+1)x]p-(\alpha-\beta-1)yq\\&\quad-\alpha\beta z=0\\&-y(1+y)t+x(1-y)s+[\alpha-1-(\beta+\gamma+1)y]q\\&\quad-\gamma xp-\beta\gamma z=0\end{aligned}\right\}H_1,$$

$$(17)\quad \left.\begin{aligned}&x(x-1)r-xys+[(\alpha+\beta+1)x-\varepsilon]p-\beta yq\\&\quad+\alpha\beta z=0\\&y(y+1)t-xs+[1-\alpha+(\gamma+\delta+1)y]q\\&\quad+\gamma\delta z=0\end{aligned}\right\}H_2,$$

$$(18)\quad \left.\begin{aligned}&x(1-4x)r+y(1-4x)s-y^2t+[\gamma-(4\alpha+6)x]p\\&\quad-2(\alpha+1)yq-\alpha(\alpha+1)z=0\\&y(1-y)t+x(1-2y)s+[\gamma-(\alpha+\beta+1)y]q\\&\quad-2\beta xp-\alpha\beta z=0\end{aligned}\right\}H_3,$$

$$(19)\quad \left.\begin{aligned} & x(1-4x)r-4xys-y^2t+[\gamma-(4\alpha+4)x]p \\ & \qquad -(3\alpha+2)yq-\alpha(\alpha+1)z=0 \\ & y(1-y)t-2xys+[\delta-(\alpha+\beta)y]q-2\beta xp \\ & \qquad -\alpha\beta z=0 \end{aligned}\right\} H_4,$$

$$(20)\quad \left.\begin{aligned} & x(1+4x)r-y(1-4x)s+y^2t+[1-\gamma+4(\alpha+1)x]p \\ & \qquad +(3\alpha+2)yq-\alpha(\alpha+1)z=0 \\ & y(1-y)t-xys+2x^2r^2+[\gamma-(\alpha+\beta+1)y]q \\ & \qquad +(2+\alpha-2\beta)xp-\alpha\beta z=0 \end{aligned}\right\} H_5.$$

$$(21)\quad \left.\begin{aligned} & x(1+4x)r-(1+4x)ys+y^2t+[1-\beta+(4\alpha+6)x]p \\ & \qquad -2\alpha yq+\alpha(\alpha+1)z=0 \\ & y(1+y)t-x(2+y)s+[1-\alpha+(\beta+\gamma+1)y]q-\gamma xp \\ & \qquad +\beta\gamma z=0 \end{aligned}\right\} H_6,$$

$$(22)\quad \left.\begin{aligned} & x(1-4x)r+4xys-y^2t+[\delta-(4\alpha+6)x]p \\ & \qquad +2\alpha yq-\alpha(\alpha+1)z=0 \\ & y(1+y)t-3xys+[1-\alpha+(\beta+\gamma+1)y]q \\ & \qquad -\gamma xp+\beta\gamma z=0 \end{aligned}\right\} H_7,$$

$$(23)\quad \left.\begin{aligned} & x(1-x)r+y(1-x)s+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]p \\ & \qquad -\beta yq-\alpha\beta z=0 \\ & yt+xs+(\gamma-y)q-xp-\alpha z=0 \end{aligned}\right\} \Phi_1,$$

$$(24)\quad \left.\begin{aligned} & xr+ys+(\gamma-x)p-\beta z=0 \\ & yt+xs+(\gamma-y)q-\beta' z=0 \end{aligned}\right\} \Phi_2,$$

$$(25)\quad \left.\begin{aligned} & xr+ys+(\gamma-x)p-\beta z=0 \\ & yt+xs+\gamma q-z=0 \end{aligned}\right\} \Phi_3,$$

$$(26)\quad \left.\begin{aligned} & x(1-x)r-xys+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]p-\beta yq \\ & \qquad -\alpha\beta z=0 \\ & yt+(\gamma'-y)q-xp-\alpha z=0 \end{aligned}\right\} \Psi_1,$$

$$(27)\quad \left.\begin{aligned} & xr+(\gamma-x)p-yq-\alpha z=0 \\ & yt+(\gamma'-y)q-xp-\alpha z=0 \end{aligned}\right\} \Psi_2,$$

$$(28)\quad \left.\begin{aligned} & x(1-x)r+ys+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]p-\alpha\beta z=0 \\ & yt+xs+(\gamma-y)q-\alpha' z=0 \end{aligned}\right\} \Xi_1,$$

$$(29)\quad \left.\begin{aligned} & x(1-x)r+ys+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]p \\ & \qquad -\alpha\beta z=0 \\ & yt+xs+\gamma q-z=0 \end{aligned}\right\}\Xi_2,$$

$$(30)\quad \left.\begin{aligned} & x(x+1)r-y(x+1)s+[1-\beta+(\alpha+\beta'+1)x]p \\ & \qquad -\alpha yq+\alpha\beta' z=0 \\ & yt-\alpha s+(1-\beta'+y)q-xp+\beta z=0 \end{aligned}\right\}\Gamma_1,$$

$$(31)\quad \left.\begin{aligned} & xr-ys+(\alpha-\beta+1)p-yq+\beta' z=0 \\ & yt-xs+(y-\beta'+1)q-xp+\beta z=0 \end{aligned}\right\}\Gamma_2,$$

$$(32)\quad \left.\begin{aligned} & x(1-x)r+y^2t+[\delta-(\alpha+\beta+1)x]p \\ & \qquad +(\beta-\alpha+1)yq-\alpha\beta z=0 \\ & yt-xs+(1-\alpha+y)q+xp+\beta z=0 \end{aligned}\right\}\mathrm{H}_1,$$

$$(33)\quad \left.\begin{aligned} & x(1-x)r+xyt+[\delta-(\alpha+\beta+1)x]p+\beta yq \\ & \qquad -\alpha\beta z=0 \\ & yt-xs+(1-\alpha+y)q+\gamma z=0 \end{aligned}\right\}\mathrm{H}_2,$$

$$(34)\quad \left.\begin{aligned} & x(1-x)r+xyt+[\delta-(\alpha+\beta+1)x]p \\ & \qquad +\beta yq-\alpha\beta z=0 \\ & yt-xs+(1-\alpha+y)q+z=0 \end{aligned}\right\}\mathrm{H}_3,$$

$$(35)\quad \left.\begin{aligned} & xr-(\delta-x)p+yq-\alpha z=0 \\ & -yt+xs-(1-\alpha+y)q-\gamma z=0 \end{aligned}\right\}\mathrm{H}_4,$$

$$(36)\quad \left.\begin{aligned} & xr+(\delta-x)p+yq-\alpha z=0 \\ & yt-xs+(1-\alpha+y)q+z=0 \end{aligned}\right\}\mathrm{H}_5,$$

$$(37)\quad \left.\begin{aligned} & x(1-4x)r+y(1-4x)s-y^2t+[\gamma-(4\alpha+6)x]p \\ & \qquad -(2\alpha+2)yq-\alpha(\alpha+1)z=0 \\ & yt+xs+(\gamma-y)q-2xp-\alpha z=0 \end{aligned}\right\}\mathrm{H}_6,$$

$$(38)\quad \left.\begin{aligned} & x(1-4x)-4xys-y^2t+[\gamma-4(\alpha+1)x]p \\ & \qquad -(3\alpha+2)yq-\alpha(\alpha+1)z=0 \\ & yt+(\delta-y)q-2xp-\alpha z=0 \end{aligned}\right\}\mathrm{H}_7,$$

$$(39)\quad \left.\begin{aligned} & x(1+4x)r-y(1+4x)s+y^2t+[1-\beta+(4\alpha+6)x]p \\ & \qquad -2\alpha yq+\alpha(\alpha+1)z=0 \\ & yt-2xs+(1-\alpha+y)q-xp+\beta z=0 \end{aligned}\right\}\mathrm{H}_8,$$

$$(40)\quad \left.\begin{aligned} & x(1-4x)r+4xys-y^2t+[\delta-(4\alpha+6)x]p \\ & \quad +2\alpha yq-\alpha(\alpha+1)z=0 \\ & yt-2xs+(1-\alpha+y)q+\beta z=0 \end{aligned}\right\} H_9,$$

$$(41)\quad \left.\begin{aligned} & x(1-4x)r+4xys-y^2t+[\delta-(4\alpha+6)x]p \\ & \quad +2\alpha yq-\alpha(\alpha+1)z=0 \\ & yt-2xs+(1-\alpha)q+z=0 \end{aligned}\right\} H_{10},$$

$$(42)\quad \left.\begin{aligned} & xr+(\delta-x)p+yq-\alpha z=0 \\ & y(y+1)t-xs+[1-\alpha+(\beta+\gamma+1)y]q+\beta\gamma z=0 \end{aligned}\right\} H_{11}.$$

阿貝尔和康拜·特·范利在論文中提到將研究这些偏微方程組中的若干个，这篇論文刊出以后，就有更多的論文提出，就中特别是賀恩，鮑耳格什，貝契納尔，爱尔台里等的研究．每一組方程的某些解是已知的，但除了 F_1, G_2 組 (Erdélyi, 未刊布), F_4 組 (Burchnall 1939, Erdélyi 1941) 及 Φ_1, Φ_2, Γ_2 組 (Erdélyi, 1939, 1940) 之外，所有确切的基本解的全系还是不知道的．

处理这种偏微方程組的困难有两种原因．第一个原因是偏微方程組的一般解析理論在此并不適用；特别是我們对方程組的两条以上奇曲綫的交点或两条奇曲綫的切点的鄰域中的解的性态，所知还很貧乏．第二个原因是顯然不同的方程組太多了．这个第二种困难可以应用变换理論（見 5-11 節）的結果來適当減輕，变換理論指出方程組中除了

$$(43)\quad F_4,\ H_1,\ H_5,\ \mathrm{H}_1$$

可能为例外之外，每一个与二階超比級数有关的方程組都可以簡化为 F_2 組，或由此簡化为一个特殊的或極限的情形．

5-9-1. 印斯的研究

印斯 (1942) 研究了下面的方程組

$$(44)\quad \begin{aligned} & ar+bc_1s+dp+e_1q+fz=0 \\ & a_1t+b_1cs+d_1q+ep+f_1z=0. \end{aligned}$$

其中 a, b, c, d, e, f 为 x 的多項式，$a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1$ 为 y 的多項式．他对 $a, b, \cdots e_1, f_1$ 作了某些假設，保証 (44) 有四个綫性独

立解，使它关于 x 及 y 对称（适当互变常数参数），并使奇異曲綫由(44)中二階偏導数的系数确定；在这种假設下，他証明(44)可簡化为 F_2 組或簡化为这一組的一个特殊或極限情形．

5-10.　簡約公式

在例外情形下，二变量的超比函数可以表示为較簡單的函数，特别是表示为單变量的超比函数或初等函数．在这种情况下我們称之为可簡約的超比函数及簡約公式．例外情形的产生或者是由于超比級数中的参数滿足一个或几个关系式，或者是由于两变量可以一个关系式來联系．在后一情形下，联系两变量的关系式通常就是所給級数相連的偏微方程組奇曲綫的方程．

某些一般的簡約公式是非常明顯的：在 F_1, F_2, F_3 或 Φ_2 中如 $\beta'=0$，在任一級数中如 $y=0$，則两变量超比級数可簡化为單变量級数；这样的一般簡約在下面將不予討論．

参数特殊值下的可約性

下面的簡約公式可以这样來証明：或者將式子两边展开为無窮級数，而后比較其系数；或者作出積分表示式．

(1)　$F_1(\alpha,\beta,\beta',\beta+\beta';x,y)=(1-y)^{-\alpha}$
$$\times F[\alpha,\beta;\beta+\beta';(x-y)/(1-y)]$$

(2)　$F_2(\alpha,\beta,\beta',\beta,\gamma';x,y)=(1-x)^{-\alpha}F[\alpha,\beta';\gamma';y/(1-x)]$

(3)　$F_2(\alpha,\beta,\beta',\alpha,\alpha;x,y)=(1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'}$
$$\times F\{\beta,\beta';\alpha;xy/[(1-x)(1-y)]\}$$

(4)　$F_3(\alpha,\gamma-\alpha,\beta,\gamma-\beta,\gamma;x,y)$
$$=(1-y)^{\alpha+\beta-\gamma}F(\alpha,\beta,\gamma;x+y-xy)$$

(5)　$F_4[\alpha,\gamma+\gamma'-\alpha-1,\gamma,\gamma';x(1-y),y(1-x)]$
$$=F(\alpha,\gamma+\gamma'-\alpha-1;\gamma;x)F(\alpha,\gamma+\gamma'-\alpha-1;\gamma';y)$$

(6)　$F_4\{\alpha,\beta,\alpha,\beta;-x/[(1-x)(1-y)],-y/[(1-x)(1-y)]\}$
$$=(1-xy)^{-1}(1-x)^{\beta}(1-y)^{\alpha}$$

(7) $F_4\{\alpha, \beta, \beta, \beta; -x/[(1-x)(1-y)], -y/[(1-x)(1-y)]\}$
$= (1-x)^{\alpha}(1-y)^{\alpha}F(\alpha, 1+\alpha-\beta; \beta; xy)$

(8) $F_4\{\alpha, \beta, 1+\alpha-\beta, \beta; -x/[(1-x)(1-y)],$
$-y/[(1-x)(1-y)]\}$
$= (1-y)^{\alpha}F[\alpha, \beta; 1+\alpha-\beta; -x(1-y)/(1-x)]$

(9) $H_4[\gamma+\beta-1, \beta, \gamma, 2\beta; \frac{1}{4}(1-x^2)(1-y^2)(1+xy)^{-2},$
$2xy(1+xy)^{-1}]$
$= (1+xy)^{\gamma+\beta-1}F(\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma; \gamma; 1-x^2)$
$\times F(\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma; \beta+\frac{1}{2}; y^2)$

(1), (2), (4) 式見阿貝尔和康拜·特·范利 (1926) 著作的第 1 章; (3), (5), (6), (7), (8) 式見巴萊 (1935) 著作的第 9 章及例題; (9) 式見爱尔台里(1948)著作的 p. 384. 还有一些可約情形也可在上面指出的著作中找到.

变量特殊值下的可約性

变量特殊值下的簡約方法大体上和上面情形相仿, 但已知的結果却要少得多. 阿貝尔及康拜·特·范利的論文中僅給出下面两个公式:

(10) $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, 1) = \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta')}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta')} F(\alpha, \beta; \gamma-\beta'; x)$

(11) $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, x) = F(\alpha, \beta+\beta'; \gamma; x)$

这两公式是 5-8 (5) 式的直接結果.

5-11. 变換

虽然單变量的二階超比級数主要只有一个(卽高斯級数), 但它的变換理論却十分繁复(見 2·9～2·11 節). 二变量的二階超比級数相当多, 变換的全部公式势將有几百个, 这里只能略举几个例子. 導出这些(以及其他的)变換式的最好方法是借助于函数的積分表示式, 在这些表示式中, 積分变量的变換或積分閉道的变形將得出所求的結果. 对于 5-8 (6) 式那样其被積函数中有單变量超

比函数的積分表示式，应用这些函数的已知变換公式將得良好效果．

首先我們將把一个級数变換为同样类型的級数．

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$$

(1) $$= (1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \beta', \gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{y}{y-1}\right)$$

(2) $$= (1-x)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', \gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{y-x}{1-x}\right)$$

(3) $$= (1-y)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, \gamma-\beta-\beta', \gamma; \frac{y-x}{y-1}, \frac{y}{y-1}\right)$$

(4) $$= (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', \gamma; x, \frac{x-y}{1-y}\right)$$

(5) $$= (1-x)^{-\beta}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma-\beta-\beta', \gamma; \frac{x-y}{x-1}, y\right)$$

$$F_2(\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y)$$

(6) $$= (1-x)^{-\alpha} F_2\left(\alpha, \gamma-\beta, \beta', \gamma, \gamma'; \frac{x}{x-1}, \frac{y}{1-x}\right)$$

(7) $$= (1-y)^{-\alpha} F_2\left(\alpha, \beta, \gamma'-\beta', \gamma, \gamma'; \frac{x}{1-y}, \frac{y}{y-1}\right)$$

(8) $$= (1-x-y)^{-\alpha} F_2\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma'-\beta', \gamma, \gamma'; \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}\right).$$

所有这些公式都对应于普通超比級数的欧拉变換式[2·9(4)]．对于二变量的任何其他完全超比級数似尚不知有形如上列公式的簡單变換式．

还有把一个級数变換为同一类型級数而表示解析开拓的变換式，例如

(9) $$F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma'; x, y)$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma')\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma'-\alpha)\Gamma(\beta)}(-y)^{-\alpha} F_4(\alpha, \alpha+1-\gamma', \gamma, \alpha+1-\beta; x/y, 1/y)$$

$$+ \frac{\Gamma(\gamma')\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma'-\beta)\Gamma(\alpha)}(-y)^{-\beta} F_4(\beta+1-\gamma', \beta, \gamma, \beta+1-\alpha; x/y, 1/y);$$

最后，对于参数的特殊値，还有二次及三次变換式．所有这些变換式在阿貝尔及康拜·特·范利的論文（第一、二章）中都可找到．

其次，我們有二变量超比級数变換为其他类型二变量超比級数的变換式．这种变換式有两类：一类是一种級数的解析开拓以另一形式的級数表示，另一类是簡約公式类的变換式，它表示在参数取某些特殊値时可將級数用一个較簡單的級数來表示（即較少数参数的級数）．也許將解析开拓用别的超比函数來表示的最好已知例子是下面的变換式：

$$(10)\quad F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma; x, y)$$

$$= \sum \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\rho-\lambda)\Gamma(\sigma-\mu)}{\Gamma(\rho)\Gamma(\sigma)\Gamma(\gamma-\lambda-\mu)}(-x)^{-\lambda}(1-y)^{-\mu}$$

$$\times F_2(\lambda+\mu+1-\gamma, \lambda, \mu, \lambda+1-\rho, \mu+1-\sigma; 1/x, 1/y)$$

上式的和式包括四項，其中 $\lambda, \mu, \rho, \sigma$ 分别为 $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$; $\alpha, \beta', \beta, \alpha'$; $\beta, \alpha', \alpha, \beta'$; $\beta, \beta', \alpha, \alpha'$. 簡約的最好已知例子为

$$(11)\quad F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \alpha+\alpha'; x, y) = (1-y)^{-\beta'}$$

$$\times F_1[\alpha, \beta, \beta', \alpha+\alpha'; x, y/(y-1)]$$

下面两个表列出了精簡的完全級数的各种已知变換，即在霍恩表上以 F, G, H 表示的那些級数的变換．詳細的公式，及合流級数的类似变換可在阿貝尔和康拜·特·范利（1926），巴萊（1935）第 9 章及例題．貝契納尔和宗台（1940, 1941）（其中变換式并不顯明指出，僅作为展开式的退化情形）及爱尔台里（1948）的著作中可以看到．

解 析 开 拓

級数	变量	开拓为如下級数	变量
F_3	x, y	F_2	$1/x, 1/y$
F_3	x, y	H_2	$1/x, -y$
H_2	x, y	F_3	$1/x, -y$

参数取特殊值时的变换式或簡約式

級数	限制条件	变换为	限制条件
F_1	$\beta'+\gamma=\alpha+1$	F_4	$\beta=\gamma'$
F_2	$\alpha=\gamma'$	F_1	無
F_2	$\gamma+\gamma'=\alpha+1$	G_2	無
F_2	$\gamma+\gamma'=\alpha+1$	H_2	$\alpha+\gamma=\varepsilon$
F_2	$2\beta=\gamma$	H_4	無
F_2	$\gamma=2\beta$ 及 $\gamma'=2\beta'$	F_4	$\gamma+\gamma'=\alpha+1$
F_2	$\gamma'=2\beta$ 及 $\beta+\beta'=\alpha+\frac{1}{2}$	F_1	$\beta+\gamma'=\alpha+1$
F_2	$\beta=\beta'$ 及 $\gamma+\gamma'=\alpha+1$	F_4	$\gamma+\gamma'=\alpha+1$
F_2	$\beta=\beta'$ 及 $\gamma+\gamma'=\alpha+1$	G_1	無
F_2	$\gamma+\gamma'=\alpha+1=2-\beta=2-\beta'$	G_3	無
F_3	$\alpha+\alpha'=\gamma$	F_1	無
F_3	$\alpha+\beta=1$ 及 $\alpha+\alpha'=\gamma$	H_3	無
F_4	$\beta=\alpha+\frac{1}{2}$	H_4	$\delta=2\beta$
F_4	$\beta+\gamma'=\alpha+1$	H_4	$\beta+\gamma=\alpha+1$
H_2	$\varepsilon=2\beta$	H_7	無
H_2	$\beta=\gamma$ 及 $\alpha+\delta=\varepsilon$	H_1	$\alpha+\delta=\varepsilon$
H_2	$\gamma+\delta=1,\ \delta+\varepsilon=\alpha$	H_6	無

第二表的第一个限制条件所表示的意义是，举例説，在級数 $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$ 中如 $\beta'+\gamma=\alpha+1$，則这一級数可以用 $F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma'; x, y)$ 來表示．F_4 中的新的参数 $\alpha, \beta, \gamma, \gamma'$ 和 F_1 中的参数有关，且在 F_4 中 $\beta=\gamma'$；F_4 中的 x, y 則依賴于 F_1 中的变量．

这些表說明級数 $F_1, F_3, G_1, G_2, G_3, H_2, H_3, H_4, H_6$ 及 H_7，在其参数取任意值时，可以用 F_2 來表示，而且很明顯这些級数的極限情形——卽它們的合流級数可以用 F_2 的極限情形來表示．因此可得結論：所有二变量的二階超比級数，除了可能的例外 F_4，H_1, H_5 及 H_1 外，都可以用 F_2 或其特殊的卽極限的情形來表示，从而对这些級数相連的偏微方程組可建立相应的变換理論(見 5–9 節)．如 F_4, H_1, 及 H_5 在其参数取任意值时不依賴于 F_2，而且它們也不互相关联，这种情形虽然好像与上面相似，但現在还并不了解．

5-12. 符号形式及展开式

貝契納尔及宗台(1940, 1941)曾引入如下的算符

$$(1)\qquad \nabla(h)\equiv\frac{\Gamma(h)\Gamma(\delta+\delta'+h)}{\Gamma(\delta+h)\Gamma(\delta'+h)},\quad \Delta(h)\equiv\frac{\Gamma(\delta+h)\Gamma(\delta'+h)}{\Gamma(h)\Gamma(\delta+\delta'+h)},$$

$$\delta\equiv x\frac{\partial}{\partial x},\qquad \delta'\equiv y\frac{\partial}{\partial y},$$

利用这种算符,他們寫出

$$(2)\qquad F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';x,y)=\nabla(\alpha)\,F(\alpha,\beta;\gamma;x)\,F(\alpha,\beta';\gamma';y),$$

$$(3)\qquad F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma;x,y)=\Delta(\gamma)\,F(\alpha,\beta;\gamma;x)F(\alpha',\beta';\gamma;y),$$

$$(4)\qquad F_1(\alpha,\beta,\beta';\gamma;x,y)=\nabla(\alpha)\Delta(\gamma)F(\alpha,\beta;\gamma;x)\,F(\alpha,\beta';\gamma,y),$$

$$(5)\qquad F_4(\alpha,\beta,\gamma,\gamma';x,y)=\nabla(\alpha)\nabla(\beta)F(\alpha,\beta;\gamma;x)\,F(\alpha,\beta;\gamma';y).$$

因而用算符 Δ 及 ∇ 可將阿貝尔函数分解因式;他們还得出阿貝尔函数的变换式,如

$$(6)\qquad F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)=\nabla(\alpha)F_3(\alpha,\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y),$$

$$(7)\qquad F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)=\Delta(\gamma)F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma;x,y),$$

$$(8)\qquad F_4(\alpha,\beta,\gamma,\gamma';x,y)=\nabla(\beta)F_2(\alpha,\beta,\beta,\gamma,\gamma';x,y),$$

及其他公式.

这些符号式可用以求得很多阿貝尔函数的展开式,或者以別的阿貝尔函数表示,或者以普通的超比函数的乘積表示,反之亦然. 例如,根据 $F(\alpha,\beta;\gamma;1)$ 的高斯公式, 2-8 (46) 以符号式表示时为

$$\nabla(h)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-\delta)_r(-\delta')_r}{(h)_r\,r!}.$$

今 $(-\delta)_rF(\alpha,\beta;\gamma;x)=(-)^r\dfrac{(\alpha)_r(\beta)_r}{(\gamma)_r}x^rF(\alpha+r,\beta+r;\gamma+r;x)$,

因此 (2) 式給出如下展开式

$$(9)\qquad F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';x,y)$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r(\beta')_r}{r!\,(\gamma)_r(\gamma')_r}x^ry^rF(\alpha+r,\beta+r;\gamma+r;x)\,F(\alpha+r,$$
$$\beta'+r;\gamma'+r;y)$$

將 (2) 式反演为如下形式

$$F(\alpha,\beta;\gamma;x)F(\alpha,\beta';\gamma';y)=\Delta(\alpha)F_2(\alpha,\beta,\beta';\gamma,\gamma';x,y)$$

于是可得伴随于 (9) 式的 $\Delta(\alpha)$ 的相应展开式:

(10)
$$F(\alpha,\beta;\gamma;x)F(\alpha,\beta';\gamma';y)$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r\frac{(\alpha)_r(\beta)_r(\beta')_r}{r!(\gamma)_r(\gamma')_r}x^ry^r$$
$$\times F_2(\alpha+r,\beta+r,\beta'+r,\gamma+r,\gamma'+r;x,y)$$

这一公式可以不用符号方法而用比較等式两边 x,y 的同次項系数來証明.

应用这种方法貝契納尔和宗台得出了 15 对包含阿貝尔函数及普通超比函数的展开式,以及包含高階超比級数,漢貝特合流超比級数 Φ,Ψ,Ξ 的很多展开式. 这一方法还導出了一些有用的積分表示式 [如 5-8 (4)] 及積分公式.

还有很多包含阿貝尔函数及普通超比函数的其他展开式. 特别值得提出的一个就是雅可比多項式的双綫性母函数.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!(\alpha+\beta+1)_n}{(\alpha+1)_n(\beta+1)_n}(2n+\alpha+\beta+1)t^n$$
$$\times P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos 2\phi)P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos 2\psi)=\frac{(\alpha+\beta+1)(1-t)}{(1+t)^{\alpha+\beta+2}}$$
$$\times F_4(\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\beta+1,\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{3}{2},\alpha+1,\beta+1,a^2/k^2,b^2/k^2)$$

其中 $a=\sin\phi\sin\psi$, $b=\cos\phi\cos\psi$, $k=\frac{1}{2}(t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}})$ [見 Bailey 1935, p. 102, 例 19).

5-13. 特殊情形

为了把雅可比多項式推廣到两个变量,阿貝尔曾研究了下面的多項式族(其中 m 及 n 是非負整数):

(1)
$$\mathscr{F}_{mn}=[(\gamma)_m(\gamma')_n]^{-1}x^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}(1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha}$$
$$\times\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}[x^{\gamma+m-1}y^{\gamma'+n-1}(1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'}]$$
$$=(1-x-y)^{m+n}F_2\Big(\gamma+\gamma'-\alpha-m-n,\ -m,\ -n,\gamma,\gamma';$$
$$\frac{x}{x+y-1},\ \frac{y}{x+y-1}\Big)$$

(2) $$F_{mn}=\frac{x^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}}{(\gamma)_m(\gamma')_n}\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}[x^{\gamma+m-1}y^{\gamma'+n-1}(1-x-y)^{m+n}]$$
$$=F_2(-m-n,\gamma+m,\gamma+n,\gamma,\gamma';x,y),$$

(3) $$E_{mn}=F_2(\gamma+\gamma'+m+n,-m,-n,\gamma,\gamma';x,y).$$

后面的两个族与权函数 $x^{\gamma-1}y^{\gamma-1}$ 組成区域 $x,y\geqslant 0$, $x+y\leqslant 1$ 的双正交系.

在超球面調和函数的研究中出現有如下两个級数

(4) $$x^m y^n F_4(-\tfrac{1}{2}m,-\tfrac{1}{2}n,\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}m,\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}n,-m-n-\tfrac{1}{2}s+\tfrac{1}{2};x^{-2},y^{-2})$$

(上式也可用 F_2 來表示)及

(5) $$x^m y^n F_3[-\tfrac{1}{2}m,-\tfrac{1}{2}n,\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}m,\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}n,\tfrac{1}{2}s+\tfrac{1}{2};(x^2+y^2-1)x^{-2},(x^2+y^2-1)y^{-2}].$$

所有这些特殊情形都在阿貝尔和康拜·特·范利的專論中有所討論.

5-14. 其他級数

两变量的高于两階的超比級数曾由米林,柏克蘭,康拜·特·范利(見 Appell 及 Kampé de Fériet 的著作 1926, 第 9 章),貝契納尔与宗台 (1941), 貝契納尔 (1942)及宗台(1942)研究过. 三个变量的超比級数曾由賀恩 (1889) 研究过;劳列西拉(見 Appell 与 Kampé de Fériet 第 7 章)及爱尔台里(1937, 1939a)研究过 n 个变量的級数. 在超球面調和函数的研究中出現有劳列西拉級数的特殊情形.

將基礎超比級数推廣到二个变量的情形在爵克生(1942,1944)的著作中可以找到.

参 考 文 献

Appell, Paul and M. J. Kampé de Fériet, 1926: *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite*. Gauthier Villars.
Bailey, W. N., 1935: *Generalized hypergeometric series* (*Cambridge Tracts

in Math. and Math. Phys. No. 32) Cambridge.

Barnes, E. W., 1907: *Proc. London Math. Soc.* (2), 5, 59–116.

Barnes, E. W., 1908: *Proc. London Math. Soc.* (2), 6. 141–177.

Barnes, E. W., 1908: *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 20, 253–279.

Birkeland, Richard, 1927: *C. R. Acad. Sci. Paris.* 185, 923–925.

Borngässer, Ludwig, 1933: *Über hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen, Dissertation*, Darmstadt.

Burchnall, J. L., 1939: *Quart. J. Math., Oxford Ser.* 10, 145–150.

Burchnall, J. L., 1942: *Quart. J. Math., Oxford Ser.* 13, 90–106.

Burchnall, J. L., and T. W. Chaundy, 1940: *Quart. J. Math., Oxford Ser.* 11, 249–270.

Burchnall, J. L., and T. W. Chaundy, 1941: *Quart. J. Math., Oxford Ser.* 12, 112–128.

Chaundy, T. W., 1942: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 13, 159–171.

Erdélyi, Arthur, 1937: *Akad. Wiss. Wien., S-B* IIa, 146, 431–467.

Erdélyi, Arthur, 1939: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 59, 224–241.

Erdélyi, Arthur, 1939 a: *Nieuw Arch. Wiskunde* (2) 20, 1–34.

Erdélyi, Arthur, 1940: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 60, 344–361.

Erdélyi, Arthur, 1941: *Quart. J. Math., Oxford Ser.* 11, 68–77.

Erdélyi, Arthur, 1948: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 62, 378–385.

Horn, Jakob, 1889: *Math. Ann.* 34, 544–600.

Horn, Jakob, 1931: *Math. Ann.* 105, 381–407.

Horn, Jakob, 1935: *Math. Ann.* 111, 638–677.

Horn, Jakob, 1936: *Math. Ann.* 113, 242–291.

Horn, Jakob, 1938: *Math. Ann.* 115, 435–455.

Horn, Jakob, 1938 a: *Monatsh. Math. Phys.* 47, 186–194.

Horn, Jakob, 1939: *Monatsh. Math. Phys.* 47, 359–379.

Ince., E. L., 1942: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, A 61, 195–203.

Jackson, F. H. 1942, *Quart. J. Math.* 13, 69–82.

Jackson, F. H. 1944: *Quart. J. Math.* 15, 49–61.

MacRobert, T. M., 1937–38: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 58, 1–13.

MacRobert, T. M., 1941: *Philos. Mag.* (7), 31, 254–260.

MacRobert, T. M., 1942: *Quart. J. Math., Oxford Ser.*, 12, 65–68.

MacRobert, T. M., 1948: *Philos Mag.* (7) 39, 466–471.

Meijer, C. S., 1936: *Nieuw Arch. Wiskunde* (2) 18, 10–39.

Meijer, C. S., 1940: *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 43, 198–210 and 366–378.

Meijer, C. S., 1941 a: *ibidem* 44, 82–92, 186–194, 298–307, 442–451 and 590–598.

Meijer, C. S., 1941 b: *ibidem* 44, 435–441 and 599–605.

Meijer, C. S., 1941 c: *ibidem* 44, 1062–1070.

Meijer, C. S., 1946: *ibidem* 49, 344–456, 457–469, 632–641, 765–772, 936–943, 1063–1072, 1165–1175.

Ore, Oystein, 1929: *Cr. R. Acad. Sci. Paris*, 189, 1238–1240.

Ore, Oystein, 1930: *J. Math. Pura and Appl.* (9) 9, 311–326.

第六章 合流超比函数

6-1. 定向

如果在高斯超比級数

$$F(a, b; c; z)=1+\frac{ab}{1\cdot c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}z^2+\cdots$$

(a, c 均不等于零及負整数)

中,令 $z=x/b$, 則得一 x 的冪級数,其收斂半徑为 $|b|$, 这一級数定义了一个解析函数,奇点在 $x=0$, b 及 ∞. 当 $b\to\infty$ 时,級数的極限情形將定义一整函数,它在 $x=\infty$ 的奇点是 $F(a, b; c; x/b)$ 的两个奇点的匯合. 这样就可導出康曼尔級数

(1) $$1+\frac{a}{c}\frac{x}{1!}+\frac{a(a+1)}{c(c+1)}\cdot\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

在廣义超比級数 4-1 (1) 的記法中上式就是 ${}_1F_1(a; c; x)$, 但在本章及下面两章中(1)式可用漢貝特符号表示为

$$\Phi(a, c; x)$$

有时也用記法 $M(a, c, x)$.

級数 (1) 滿足微分方程

(2) $$x\frac{d^2y}{dx^2}+(c-x)\frac{dy}{dx}-ay=0.$$

作代換

(3) $$y=x^{-c/2}e^{x/2}z,\ a=\tfrac{1}{2}-\kappa+\mu,\ c=1+2\mu.$$

可將(2)式簡化为魏塔克耳的标准形式:

(4) $$\frac{d^2z}{dx^2}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{\kappa}{x}-\frac{\frac{1}{4}-\mu^2}{x^2}\right)z=0.$$

方程 (2) 或 (4)称为合流超比方程,它們的任一个解称为合流超比函数; a 和 c (或 κ 和 μ) 称为参数, x 为变量.

在本章中,合流超比函数的研究將以方程 (2) 为基礎,但几个

較为重要的結果也將用魏塔克耳的記法提出.

6-2. 微分方程

方程 6-1 (2) 是一个二階齐次綫性微分方程,其系数为自变量的綫性函数;可以証明每一个这样的微分方程均可解出为合流超比函数. 設

$$(1)\qquad (a_0x+b_0)\frac{d^2y}{dx^2}+(a_1x+b_1)\frac{dy}{dx}+(a_2x+b_2)y=0$$

为所給微分方程. 如 $a_0=a_1=a_2=0$, 則方程具有常系数,因而可用初等函数積出. 这样的情形我們不予討論. 作变換

$$(2)\qquad y=e^{hx}z,\ x=\lambda\xi+\mu,\ (\lambda\neq 0)$$

則 (1) 式变为

$$(3)\qquad (\alpha_0\xi+\beta_0)\frac{d^2z}{d\xi^2}+(\alpha_1\xi+\beta_1)\frac{dz}{d\xi}+(\alpha_2\xi+\beta_2)z=0.$$

其中

$$(4)\qquad \alpha_0=a_0/\lambda,\ \alpha_1=A'(h),\ \alpha_2=\lambda A(h),$$

$$\beta_0=(a_0\mu+b_0)/\lambda^2,\ \beta_1=[\mu A'(h)+B'(h)]/\lambda.$$

$$\beta_2=\mu A(h)+B(h),$$

$$(A)h=a_0h^2+a_1h+a_2,\quad A'(h)=2a_0h+a_1,$$

$$B(h)=b_0h^2+b_1h+b_2,\quad B'(h)=2b_0h+b_1.$$

如确定 λ,μ,h, 使之滿足条件

$$a_0\mu+b_0=0,\ a_0+\lambda A'(h)=0,\ A(h)=0,$$

則式 (3) 簡化为 6-1(2). 在其他情形下,改变自变量可將(3)簡化为一合流超比方程或簡化为貝塞尔方程. 所有結果列举在下面的表中,其中 $\mathscr{F}(a,c,x)$代表 6-1(2) 的任何一个解, $C_\nu(x)$ 代表下列貝塞尔方程

$$(5)\qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-\nu^2)y=0$$

的任一解.

$(a_0x+b_0)y''+(a_1x+b_1)y'+(a_2x+b_2)y=0$ 的簡化

$y=e^{hx}z,\ x=\lambda\xi+\mu,\ A(h)=a_0h^2+a_1h+a_2,\ A'(h)=\dfrac{dA}{dh},\ B(h)=b_0h^2+b_1h+b_2,\ B'(h)=\dfrac{dB}{dh}$						
	假定	h	λ	μ	z	参数
(6)	$a_0\neq0$ $D^2\equiv a_1^2-4a_0a_2\neq0$	$\dfrac{-a_1+D}{2a_0}$	$-\dfrac{a_0}{A'(h)}$	$-\dfrac{b_0}{a_0}$	$\mathscr{F}(a,\ c,\ \xi)$	$a=B(h)/A'(h)$ $c=(a_0b_1-a_1b_0)a_0^{-2}$
(7)	$a_0=0,\ a_1\neq0$	$-\dfrac{a_2}{a_1}$	1	$-\dfrac{B'(h)}{a_1}$	$\mathscr{F}(a,\ \frac{1}{2},\ k\xi^2)$	$a=B(h)/(2a_1)$ $k=-a_1/(2b_0)$
(8)	$a_0\neq0,\ a_1^2=4a_0a_2$	$-\dfrac{a_1}{2a_0}$	a_0	$-\dfrac{b_0}{a_0}$	$\xi^{\alpha}C_{2\alpha}(\beta\xi^{\frac{1}{2}})$	$\alpha=\frac{1}{2}-B'(h)/(2a_0)$ $\beta=2[B(h)]^{\frac{1}{2}}$
(9)	$a_0=a_1=0,\ a_2\neq0$	$-\dfrac{b_1}{2b_0}$	1	$\dfrac{4b_0b_2-b_1^2}{4a_2b_0}$	$\xi^{\frac{1}{2}}C_{\frac{1}{3}}(k\xi^{3/2})$	$k=\dfrac{2}{3}(a_2/b_0)^{\frac{1}{2}}$

將 (1) 式簡化为合流超比方程不是唯一的，因为 6-1 (2) 可用几种方法变換成同一形式的方程．如令

(10) $x=\lambda\xi,\ y=x^{\rho}e^{hx}z,$

微分方程 6-1 (2) 成为

(11) $$\xi\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+[c+2\rho-(1-2h)\lambda\xi]\frac{d\eta}{d\xi}$$
$$+[\rho(\rho+c-1)/\xi-\lambda(a-hc+\rho-2h\rho)$$
$$+\lambda^2h(h-1)\xi]\,\eta=0,$$

如

(12) $\rho=0$ 或 $\rho=1-c$, $h=0$ 或 $h=1$, $\lambda(1-2h)=1$,
$\alpha=\lambda(a-hc)+\rho,\ \gamma=c+2\rho$

則卽得 $\mathscr{F}(\alpha,\gamma,\xi)$ 的微分方程．由此可知，連恆等变換在內，6-1 (2) 可用四种不同的方法变換为同一个方程．

合流超比方程是一个二階齐次綫性微分方程，具有一个正則型奇点 $x=0$，其系数对所有 $x\neq0$ (包括 $x=\infty$) 正則．可以証明每一个这样的方程有如下形式（見 Tricomi 1948）

(13) $$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(a+\frac{b}{x}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\alpha+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}\right)y=0,$$

而且容易看出 [除 (13) 可以積出为初等函数的平常情形之外]，(13)的解將導出合流超比函数或貝塞尔函数．現在我們要來辨別 (13) 式的两种情形．

如 $a^2\neq4\alpha$，則

(14) $y=x^{-b/2}e^{-ax/2}w(\kappa,\mu,\xi),$

其中

(15) $\kappa=(\beta-\frac{1}{2}ab)(a^2-4\alpha)^{-\frac{1}{2}},\quad \mu=\frac{1}{2}[(b-1)^2-4\gamma]^{\frac{1}{2}},$
$\xi=(a^2-4\alpha)^{\frac{1}{2}}x,$

且 $w(\kappa,\mu,\xi)$ 是 6-1 (4) 的任一解；如 $a^2=4\alpha$，則

(16) $y=x^{\frac{1}{2}-b/2}e^{-ax/2}C_{\nu}(\xi),$

其中

(17) $\nu=[(b-1)^2-4\gamma]^{\frac{1}{2}},\ \xi=2[(\beta-\frac{1}{2}ab)x]^{\frac{1}{2}}.$

方程

(18) $$X^2\frac{d^2y}{dX^2}+(AX^\rho+B)X\frac{dy}{dX}+(DX^{2\rho}+GX^\rho+K)y=0.$$

其中 $\rho\neq 0$ 是任一数．作代换

(19) $$x=X^\nu,\quad a=A/\nu,\quad b=(B+\nu-1)/\nu,$$
$$\alpha=D\nu^{-2},\ \beta=G\nu^{-2},\ \gamma=K\nu^{-2},$$

則方程 (18) 即可簡化为方程 (13)，因而可簡化为合流超比方程．在 (18) 中如令

(20) $$y=Y\exp\left[\int\phi(X)\frac{dX}{X}\right]$$

則可得一更普遍的形式，(20) 式中的 Y 滿足方程

(21) $$X^2\frac{d^2z}{dX^2}+(AX^\rho+B+2\phi)X\frac{dz}{dX}+\left[DX^{2\rho}+GX^\rho+K\right.$$
$$\left.+(AX^\rho+B-1)\phi+\phi^2+X\frac{d\phi}{dX}\right]Y=0.$$

例如，如 $\phi(X)=hX^\sigma$，則

(22) $$X^2\frac{d^2z}{dX^2}+(AX^\rho+BX^\sigma+C)X\frac{dz}{dX}$$
$$+(DX^{2\rho}+EX^{\rho+\sigma}+FX^{2\sigma}+GX^\rho+HX^\sigma+K)z=0.$$

在条件

(23) $$E=\tfrac{1}{2}AB,\ F=\tfrac{1}{4}B^2,\ H=\tfrac{1}{2}B(C+\sigma-1)$$

下就可積出为合流超比函数．

在这种地方值得注意的是貝塞尔函数本身也是特殊的合流超比函数（見 6-9-1）．因此在所有一切不是普通的情形下本節的微分方程都可以積出为合流超比函数．

可以積出为合流超比函数的二階綫性微分方程主要为 (1)，(13)，(18) 及 (22)．而 (22) 式可積为合流超比函数应滿足条件 (23)．

6-3. 合流方程在接近原点处的通解

我們來研究如下形式的合流超比方程

(1) $x\frac{d^2y}{dx^2}+(c-x)\frac{dy}{dx}-ay=0.$

这个方程的一个解为

(2) $y_1=\Phi(a, c; x)$,

变换 6-2 (10), 6-2 (12) 給出另外三个解,即

(3) $y_2=x^{1-c}\Phi(a-c+1, 2-c; x)$,

(4) $y_3=e^x\Phi(c-a, c; -x)$

(5) $y_4=x^{1-c}e^x\Phi(1-a, 2-c; -x)$.

从它們在原点上的性态可知 y_1 及 y_2 为綫性独立的条件是 c 不为整数,因此在这种情形下 (1) 式的通解可寫成

(6) $y=Ay_1+By_2$

其中 A 及 B 为任意常数. c 为整数的例外情形將在以后討論(見 6-7-1 節).

另一方面, y_1 及 y_3 都是(1)的解,而且在原点上都是正則的,此时其値各等于 1. 由于 (c 为非整数)微分方程不能有一个以上的这种解,因而必定有 $y_1=y_3$, 或

(7) $\Phi(a, c; x)=e^x\Phi(c-a, c; -x)$

这就称为康曼尔变换. 同理,由康曼尔变换得 $y_2=y_4$.

康曼尔变換是超比級数的欧拉变換[見 2-1(22)] 的一个極限情形:

$$F(a, b; c; z)=(1-z)^{-b}F[c-a, b; c; z/(z-1)]$$

是一个很重要的关系. 我們在証明中假定 c 是一个非整数,但經开拓以后,可知这个变換对于正整数的 c 也成立.

如 y_p 及 y_q 为 (1) 的二个解,則它們的隆司克式

(8) $W_{pq}=y_p\frac{d}{dx}y_q-y_q\frac{d}{dx}y_p$

必具有 $K_{pq}e^xx^{-c}$ 的形式,其中常数 K_{pq} 可用 y 的展开級数的头两項來計值. 我們有

(9) $W_{12}=W_{34}=W_{14}=-W_{23}=(1-c)x^{-c}e^x$.

四个解的所有其他隆司克式恆等于零.

6-4. Φ 函数的初等关系

像在高斯超比級数的理論中一样，四个函数

$$(1)\qquad \Phi(a+)\equiv\Phi(a+1,\,c;\,x),\quad \Phi(a-)\equiv\Phi(a-1,\,c;\,x)$$
$$\Phi(c+)\equiv\Phi(a,\,c+1;\,x),\quad \Phi(c-)\equiv\Phi(a,\,c-1;\,x)$$

称为是鄰接于 $\Phi=\Phi(a,c;x)$ 的函数．函数 Φ 与任何两个鄰接于它的函数是綫性关联的．表示这种关联的六个公式可从高斯的鄰接函数关系式(見 2-1-2) 中導出，也可以用比較 x 的同次冪的系数來証明．这些公式如下：

$$(2)\qquad (c-a)\Phi(a-)+(2a-c+x)\Phi-a\Phi(a+)=0,$$
$$(3)\qquad c(c-1)\Phi(c-)-c(c-1+x)\Phi+(c-a)x\Phi(c+)=0,$$
$$(4)\qquad (a-c+1)\Phi-a\Phi(a+)+(c-1)\Phi(c-)=0,$$
$$(5)\qquad c\Phi-c\Phi(a-)-x\Phi(c+)=0,$$
$$(6)\qquad c(a+x)\Phi-(c-a)x\Phi(c+)-ac\Phi(a+)=0,$$
$$(7)\qquad (a-1+x)\Phi+(c-a)\Phi(a-)-(c-1)\Phi(c-)=0.$$

这些关系式不是完全独立的．从二个適当选擇的公式中，例如，从 (2) 及 (4) 中通过簡單的运算卽可得出其余的四式．

任何一个函数 $\Phi(a+m,\,c+n;\,x)$, m, n 整数，称为 $\Phi(a,c;x)$ 的連帶函数．重复应用鄰接函数之間的关系式，很容易証明：任何三个連帶的函数都是綫性齐次关联的，其关联的系数为 x 的多項式．

利用逐項微分法可得

$$(8)\qquad \frac{d}{dx}\Phi(a,\,c;\,x)=\frac{a}{c}\Phi(a+1,\,c+1;\,x)$$

或 $\Phi'=(a/c)\Phi(a+,\,c+)$．重复应用这一关系，可知 Φ 的任何階導数是 Φ 的一个連帶函数，因而，任何三个導数都是綫性齐次关联的，关联系数为 x 的多項式．微分方程 6-1(2) 就是这种关系的一个最簡單例子．公式 (8) 与鄰接函数間关系的結合可得

$$(9)\qquad \Phi'=\frac{a}{x}[\Phi(a+)-\Phi]=\left(\frac{a}{c}-1\right)\Phi(c+)+\Phi$$
$$=\frac{1-c}{x}[\Phi-\Phi(c-1)]$$

其他有用的公式有

(10) $$\frac{d^n}{dx^n}\Phi(a, c; x) = \frac{(a)_n}{(c)_n}\Phi(a+n, c+n; x)$$

(11) $$\frac{d^n}{dx^n}[x^{a+n-1}\Phi(a, c; x)] = (a)_n x^{a-1}\Phi(a+n, c; x)$$

(12) $$\frac{d^n}{dx^n}[x^{c-1}\Phi(a, c; x)] = (-1)^n(1-c)_n x^{c-1-n}\Phi(a, c-n; x)$$

(13) $$\frac{d^n}{dx^n}[e^{-x}\Phi(a, c; x)] = (-1)^n\frac{(c-a)_n}{(c)_n}e^{-x}\Phi(a, c+n; x)$$

(14) $$\frac{d^n}{dx^n}[e^{-x}x^{c-a+n-1}\Phi(a, c; x)] = (c-a)_n e^{-x}x^{c-a-1}\Phi(a-n, c; x).$$

此处

$$(a)_0 = 1,\ (a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

$$n = 1, 2, 3, \cdots$$

6-5. 基礎積分表示式

我們知道系数为自变量綫性函数的綫性齐次微分方程都可以用拉普拉斯積分來解出．積分表示式

(1) $$\Phi(a, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 e^{xu}u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}\,du$$

$$\mathrm{Re}\,c > \mathrm{Re}\,a > 0.$$

將 e^{xu} 展开为 x 的冪級数就可以立即得到証明．这一表示式提供了一个用如下形式的積分

$$y = \int_C e^{-xt}t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}\,dt$$

來解方程 6-1 (2) 的方法，上面这个積分式也是根据拉普拉斯法作出．將这一積分式代入 6-1 (2)，并应用恆等式

$$\left[x\frac{d^2}{dx^2} + (c-x)\frac{d}{dx} - a\right][e^{-xt}t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}]$$

$$= -\frac{d}{dt}[e^{-xt}t^a(1+t)^{c-a}]$$

來証明在圍道 c 不通过被积函数的任一奇点，$e^{-xt}t^{a}(1+t)^{c-a}$ 的初值及終值都是有限而彼此相等的情形下，所用積分將满足方程 6-1(2). 若 $\operatorname{Re} c>\operatorname{Re} a>0$，$c$ 的一个可能选择是区間 $(0,-1)$，从而証明(1)满足方程 6-1(2). 如 $\operatorname{Re} a>0$，另一可能选择是一条从原点出發的射綫. 令

$$(2)\qquad \Psi(a, c; x)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_{0}^{\infty} e^{-xt} t^{a-1}(1+t)^{c-a-1} dt \qquad \operatorname{Re} a>0.$$

这一方程定义了 6-1 (2) 在半平面 $\operatorname{Re} x>0$ 上的一个解. 定义域可以借積分路徑的旋轉來开拓. 因而

$$(3)\qquad \Psi(a, c; x)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_{0}^{\infty e^{i\phi}} e^{-xt} t^{a-1}(1+t)^{c-a-1} dt$$

$$\operatorname{Re} a>0,\quad -\pi<\phi<\pi,\quad -\tfrac{1}{2}\pi<\phi+\arg x<\tfrac{1}{2}\pi.$$

此处假定 t^{a-1} 及$(1+t)^{c-a-1}$取主値. 当引用圍道積分时，6-11(2) 及 6-11 (1) 中对 Φ 所加的条件 $\operatorname{Re} a>0$ 以及 $\operatorname{Re} c>\operatorname{Re} a>0$ 將在以后移去.

另外一种積分表示式要用到米林–巴尼斯積分 (見 1-19 節). 公式

$$(4)\qquad \Phi(a, c; x)=\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(-s)\Gamma(a+s)}{\Gamma(c+s)}(-x)^{s} ds$$

$$-\tfrac{1}{2}\pi<\arg(-x)<\tfrac{1}{2}\pi,\quad 0>\gamma>-\operatorname{Re} a,\quad c\neq 0, 1, 2, \cdots$$

把積分計算为被積函数在 $\Gamma(-s)$極上的留数之和即可得到証明.

在式 (2) 中，作代換

$$\Gamma(a-c+1)(1+t)^{c-a-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Gamma(-s)\Gamma(a-c+s+1)t^{s} ds$$

$$0>\gamma>\operatorname{Re}(c-a).$$

就可得对应的 Ψ 的表示式. 如 $\gamma+\operatorname{Re} a>0$，則互換積分次序是許可的. 因此得

$$\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)\Psi(a, c; x)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} ds\, \Gamma(-s)\Gamma(a-c+s+1)\int_{0}^{\infty} e^{-xt} t^{a+s-1} dt,$$

算出最后的積分式，得

$$\Psi(a, c; x)=\frac{x^{-a}}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(-s)\Gamma(a+s)\Gamma(a-c+1+s)}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)}x^{-s}\,ds,$$

或稍改变其記法，得

$$\Psi(a, c; x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(-s)\Gamma(1-c-s)}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)}x^{s}\,ds \tag{5}$$

$$-\operatorname{Re} a<\gamma<\min(0, 1-\operatorname{Re} c),\quad -\frac{3\pi}{2}<\arg x<\frac{3\pi}{2}.$$

在推導中应作更嚴格的假定．擴充到 (5) 式的条件是从解析开拓理論中得出的．(4)(5)两式中参数所受的限制条件在積分路徑作適当变形时仍可進一步放松．事实上，只要 a 不等于零或負整数，積分圍道在必要时可以有刻鑿，以便使 $\Gamma(-s)$ 的極与 $\Gamma(a+s)$ 的極分离开來，則对于任何 γ，(4)式都成立．同理，只要 a 和 $a-c+1$ 都不等于零或負整数，積分圍道可將 $\Gamma(a+s)$ 的極与 $\Gamma(-s)\times\Gamma(1-c-s)$ 的極分开，則(5)式也成立．$\arg x$ 的限制条件不能放寬．

可以証明(4)(5)两式都滿足 6-1(2)[見 Whittaker 及 Watson 1927 的著作 16-4 節]．

从 (5) 式可得

$$\Psi(a, c; x)=x^{1-c}\Psi(a-c+1, 2-c; x). \tag{6}$$

如果 c 不是整数，$\Gamma(-s)\Gamma(1-c-s)$ 的極都是一階極点．將(5)計算为被積函数在这些單極的留数之和可導出 Φ-函数及 Ψ-函数間的一个重要公式

$$\psi(a, c; x)=\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)}\Phi(a, c; x)+\frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}x^{1-c}\Phi(a-c+1, 2-c; x). \tag{7}$$

6-6. Ψ 函数的基本关系

Ψ 函数系由特列柯米 (1927) 所提出，他以 G 表示；这一函数与 F_1 (Meixner, 1933)，$E(\alpha, \beta::x)$ (MacRobert 1941) 及 ${}_2F_0(\alpha, \beta; x)$ (Erdélyi, 1939) 之間的关系如下：

(1)　$E(\alpha, \beta::x)=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)x^{\alpha}\Psi(\alpha, \alpha-\beta+1; x)$

(2)　$F_1(\alpha, \gamma, x)=e^{i\pi\alpha}\dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\Psi(\alpha, \gamma; x)$

(3)　${}_2F_0(\alpha, \beta; -1/x)=x^{\alpha}\Psi(\alpha, \alpha-\beta+1; x)$.

$\Psi(a, c; x)$ 是 x 的一个多值函数，通常我們只考慮它在沿負实軸剖割的平面中的主枝，这一分枝由 6-5(3) 式在条件 $-\frac{1}{2}\pi\leqslant\phi\leqslant\frac{1}{2}\pi$ 下所确定.

Ψ 函数的許多基本关系式直接可从 6-4 節 Φ 的相应关系中得出.

(4)　$\Psi(a-)-(2a-c+x)\Psi+a(a-c+1)\Psi(a+)=0$

(5)　$(c-a+1)\Psi(c-)-(c-1+x)\Psi+x\Psi(c+)=0$

(6)　$\Psi-a\Psi(a+)-\Psi(c-)=0$

(7)　$(c-a)\Psi-x\Psi(c+)+\Psi(a-)=0$

(8)　$(a+x)\Psi+a(c-a-1)\Psi(a+)-x\Psi(c+)=0$

(9)　$(a-1+x)\Psi-\Psi(a-)+(a-c+1)\Psi(c-)=0$

(10)　$\Psi'=a\Psi(a+, c+)=\Psi-\Psi(c+)$

$=(a/x)[(a-c+1)\Psi(a+)-\Psi]$

$=(1/x)[(a-c+x)\Psi-\Psi(a-)]$

(11)　$\dfrac{d^n}{dx^n}\Psi(a, c; x)=(-1)^n(a)_n\Psi(a+n, c+n; x)$

(12)　$\dfrac{d^n}{dx^n}[x^{c-1}\Psi(a, c; x)]=(-1)^n(a-c+1)_n x^{c-n-1}\Psi(a, c-n; x)$

(13)　$\dfrac{d^n}{dx^n}[x^{a+n-1}\Psi(a, c; x)]=(a)_n(a-c+1)_n x^{a-1}\Psi(a+n, c; x)$

(14)　$\dfrac{d^n}{dx^n}[e^{-x}\Psi(a, c; x)]=(-1)^n e^{-x}\Psi(a, c+n; x)$

(15)　$\dfrac{d^n}{dx^n}[e^{-x}x^{c-a+n-1}\Psi(a, c; x)]=(-1)^n e^{-x}x^{c-a-1}\Psi(a-n, c; x)$

6-7. 合流方程的基本解組

合流方程的四个解，y_1 至 y_4，在 6-3 節中已列出. 从 6-5 節

以及 6-3 節的討論中可知合流方程还有四个解为

(1) $y_5=\Psi(a, c; x)$

(2) $y_6=x^{1-c}\Psi(a-c+1, 2-c; x)$

(3) $y_7=e^x\Psi(c-a, c; -x)$

(4) $y_8=e^x x^{1-c}\Psi(1-a, 2-c; -x)$

四个解 $y_1\cdots y_4$ 之間的关系已在 6-3 節中提及:特别是,只要 c 不是整数,則 $y_1=y_3$ 及 $y_2=y_4$ 是 6-1 (2) 的基本解組. 現在我們來討論另外四个解 $y_5, \cdots y_8$ 之間的关系. 在本節中我們將假定 c 不是整数. 例外情形將在下節中处理.

从 6-5 (6) 式可知

(5) $y_5=y_6$, $y_8=-e^{-i\varepsilon\pi c}y_7$

其中 $\operatorname{Im} x>0$ 时, $\varepsilon=\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} x)=1$, $\operatorname{Im} x<0$ 时 $\varepsilon=\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} x)=-1$. 在本節中 ε 都具有这个意义. 我們約定以因式 $e^{i\varepsilon\pi(1-c)}$ 决定 x^{1-c}. 因此,我們仍有四个一般都是互不相同的解,即 $y_1=y_3$, $y_2=y_4$, $y_5=y_6$ 及 $y_7=e^{i\pi\varepsilon(c-1)}y_8$. 所有这些解在 c 不是整数时都有定义. 它們的隆司克式[見 6-3 (8)] 均具有 $W_{pq}=K_{pq}e^x x^{-c}$ 的形式,且

(6)
$$K_{12}=1-c, \qquad K_{15}=-\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)},$$
$$K_{57}=e^{i\pi\varepsilon(c-a)}, \qquad K_{17}=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}e^{i\pi\varepsilon c},$$
$$K_{25}=-\frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)}, \quad K_{27}=-\frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)}.$$

在一般的情况下,即在 c, a, $c-a$ 不是整数的情况下,四个解中任何两个都是互不相同的,因而組成一个基本組. 不过,如 n 代表一非負整数,而 $a=-n$, W_{15} 恆等于零,因而 y_1 及 y_5 互为常数倍数, 6-5 (7) 表明这种情形是实在的. 同样,如 $a=1+n$, y_2 及 y_7 重合;如 $c-a=-n$, y_1 及 y_7 重合;如 $c-a=1+n$, y_2 与 y_5 互为常数倍数. 如 c 为整数, y_1 及 y_2 將不再有定义,故不能用. W_{57} 是在 c 不为整数的假定下由 W_{12} 及 6-5 (7) 中導出:但根据連續性,它对整数的 c 也將成立. 因为 x 的关系它永不能恆等于

零，故知 y_5 及 y_7 在任何情形下都是 6-1 (2) 的一个基本解組.

以 Φ 表示 Ψ 的表达式如 6-5 (7)，反过来，用 Ψ 表示 Φ 的表达式可以这样来求：寫出类似于 6-5 (7) 的 y_7 的表达式，而后消去二个 Φ-函数中的一个. 結果为

$$(7)\qquad \Phi(a, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} e^{i\varepsilon a\pi} \Psi(a, c; x) + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^{i\pi(a-c)\varepsilon} e^x \Psi(c-a, c; -x),$$

及 y_2 的一个伴随公式. 运用(7)及 6-5 (7)，可建立下面的合流方程解之間的关系式

$$(8)\qquad y_5 = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} y_1 + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} y_2,$$

$$(9)\qquad y_7 = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)} y_1 - \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)} e^{i\pi c\varepsilon} y_2,$$

$$(10)\qquad y_1 = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} e^{i\pi a\varepsilon} y_5 + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^{i\pi(a-c)\varepsilon} y_7,$$

$$(11)\qquad y_2 = e^{\varepsilon(a-c)\pi i} \left[-\frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)} y_5 + \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)} y_7 \right].$$

6-7-1. 对数情形

函数 $\Phi(a; c; x)$ 是 x 的一个整函数，也是 a 的一个整函数. 把 Φ 作为 c 的一个函数，则在 $c=0, -1, -2, \cdots$ 上 Φ 具有極点，因而在这些点上不再有定义. 不过，关系式

$$(12)\qquad \lim_{c\to 1-n} \frac{\Phi(a, c; x)}{\Gamma(c)} = \frac{(a)_n}{n!} x^n \Phi(a+n, 1+n; x)$$

$$n=1, 2, 3, \cdots$$

表明 $\Phi^* = \Phi(a, c; x)/\Gamma(c)$ 同时是两个参数及变量的一个整函数. 这一函数在其他方面也表示出一种簡單的性質，例如 6-4 節中几个微分公式在以 Φ^* 表示时將較为簡單.

綜上所述可知当 c 为一整数时 Φ 函数只給出了合流方程的一个解. 如 $c=1$，則 y_1 与 y_2 恆等. 如 $c=2, 3, \cdots$，y_2 不存在，

虽然在 c 趋近于大于 1 的一个整数时方程 $y_2/\Gamma(2-c)$ 趋向于固定的極限，但 (12) 式表明这一極限僅是 y_1 的一个数値倍数，并不能提供新的解. 对于 $c=0, -1, -2, \cdots$, 除了 y_1 与 y_2 的情形互换之外，其他情形都与上面的相仿. 只要 c 是一整数，y_1 或 y_2 是一个解，而第二个解將具有对数項. 这个第二解可用熟知的弗洛平紐司方法來确定.

另外一个近于例外的情形是用 Ψ-函数作为出發点. 積分表示式 6-5 (3) 定义了所有一切 c 値的 Ψ-函数，而且表明 Ψ-函数永远滿足于合流方程. 如 c 不为整数，Ψ 展开为 x 的升冪式有如 6-5(7). 如 c 为整数，我們尽可假定 $c=1+n$, $n=0, 1, 2, \cdots$. 当 $c=1+n$ 时，6-5(7) 式右边的两項都变成無窮，要得 x 的升冪展开式，或者在 6-5 (7) 中令 $c\to n+1$, 或更直接地从 6-5 (5) 式來求. 我們現在大略談一談第二种方法.

如 $c=n+1$, 則 6-5(5) 的被積函数在 $s=-n, -n+1, \cdots, -1$ 上有單極，在 $s=0, 1, 2, \cdots$ 上有重極(如 $n=0$, 則只有重極). 在單極点 $s=r-n$, $r=0, 1, \cdots, n-1$ 上，$\Gamma(a+s)\Gamma(-s)\times\Gamma(-n-s)x^{-s}$ 的留数为

$$(-)^{r-1}\Gamma(a-n+r)\Gamma(n-r)x^{r-n}/r!;$$

在重極 $s=r$, $r=0, 1, 2, \cdots$ 上的留数为

$$\frac{(-1)^n\Gamma(a+r)}{r!\,(n+r)!}[\ln x+\psi(a+r)-\psi(1+r)-\psi(1+n+r)]x^r$$

其中 $\psi(z)$ 为 $\Gamma(z)$ 的对数導数(見 1-7 節). 把積分 6-5(5) 計算为被積函数在積分路徑右边極上的留数之和，得

$$(13)\quad \Psi(a, n+1; x)=\frac{(-1)^{n-1}}{n!\,\Gamma(a-n)}\Big\{\Phi(a, n+1; x)\ln x$$
$$+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a)_r}{(n+1)_r}[\psi(a+r)-\psi(1+r)-\psi(1+n+r)]\frac{x^r}{r!}\Big\}$$
$$+\frac{(n-1)!}{\Gamma(a)}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(a-n)_r}{(1-n)_r}\frac{x^{r-n}}{r!}\qquad n=0, 1, 2, \cdots$$

如 $n=0$, 最后一項和应去掉. $\Psi(a, 1-n; x)$ 的对应展开式可从

(13) 及 6-5 (6) 中得出.

有些公式在对数情形中得到簡化. 作为一个例子, 我們將証明

$$(14)\quad f(c)=\left(\frac{\partial}{\partial a}+2\frac{\partial}{\partial c}\right)\Phi(a,c;x)$$

在 c 为整数时可用合流超比函数來表示.

因 $$\frac{\partial}{\partial a}(a)_n=(a)_n[\psi(a+n)-\psi(a)]$$

其中 $\psi(z)$ 为 γ-函数的对数導数, 將 6-1 (1) 逐項微分, 得

$$f(c)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a)_r}{(c)_r}[\psi(a+r)-\psi(a)-2\psi(c+n)+2\psi(c)]\frac{x^r}{r!}.$$

取 $n=0$ 而与 (13) 式比較, 得

$$(15)\quad f(1)=[2\psi(1)-\psi(a)-\ln x]\Phi(a,1;x)-\Gamma(a)\Psi(a,1;x).$$

$f(1+n)$, $n=0, 1, 2, \cdots$ 的对应式可用 6-4 (13) 式寫出.

6-8. Ψ-函数的其他性質

像 Φ-函数一样, Ψ-函数也是高斯超比函数的一个極限情形. 因为

$$(1)\quad \lim_{c\to\infty}F(a,b;c;1-c/x)=x^a\Psi(a,a-b+1;x)$$

(Erdélyi 1939 a). 这一公式的証明可以利用 6-5 (7) 并將 $F(1-c/x)$ 展开为 x 的升冪式來完成.

Ψ 在 x 很小时的性态可以借 6-5(7), 6-7(13)及 c 等于零或負整数时的相应公式來研究. 兹將結果彙列于下表

x 很小时的 $\Psi(a, c; x)$

	c	Ψ
(2)	$\mathrm{Re}\, c>1$	$x^{1-c}\Gamma(c-1)/\Gamma(a)+R$
(3)	$\mathrm{Re}\, c<1$	$\Gamma(1-c)/\Gamma(a-c+1)+R$
(4)	$\mathrm{Re}\, c=1,\ c\neq 1$	$\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)}+\frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}x^{1-c}+R$
(5)	$c=1$	$-[\Gamma(a)]^{-1}\ln x+R$

余项的階数如下表

$$R=O(u)$$

	c	u
(6)	$\operatorname{Re} c\geqslant 2,\ c\neq 2$	$\lvert x\rvert^{\operatorname{Re} c-2}$
(7)	$c=2$	$\lvert\ln x\rvert$
(8)	$1<\operatorname{Re} c<2$	1
(9)	$\operatorname{Re} c=1,\ c\neq 1$	$\lvert x\rvert$
(10)	$c=1$	$\lvert x\ln x\rvert$
(11)	$0<\operatorname{Re} c<1$	$\lvert x\rvert^{1-\operatorname{Re} c}$
(12)	$\operatorname{Re} c\leqslant 0,\ c\neq 0$	$\lvert x\rvert$
(13)	$c=0$	$\lvert x\ln x\rvert$

根据 6–6 節的約定，負实軸为 Ψ-函数的一个分枝切割．以 $f(-\xi+i0)$ 表示当 η 通过正数値而 $\to 0$ 时 $f(-\xi+i\eta)$ 的極限，同样定义 $f(-\xi-i0)$．从 6–5 (7) 得

$$(14)\quad \Psi(a,c;-\xi\pm i0)=\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)}\Phi(a,c;-\xi)$$
$$-\frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}e^{\mp i\pi c}\xi^{1-c}\Phi(a-c+1,2-c;-\xi)$$
$$=e^{-\xi}\left[\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)}\Phi(c-a,c;-\xi)\right.$$
$$\left.-\frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}e^{\mp i\pi c}\xi^{1-c}\Phi(1-a,2-c;-\xi)\right]$$

其中 $\xi>0$，或者均用上面的符号，或者均用下面的符号．特别是

$$(15)\quad \Delta\equiv\Psi(a,c;-\xi+i0)-\Psi(a,c;-\xi-i0)$$
$$=-\frac{2\pi i}{\Gamma(a)\Gamma(2-c)}\xi^{1-c}\Phi(a-c+1;2-c;-\xi).$$

由于这一公式是根据 6–5 (7) 導出的，所以起先对整数的 c 是划除的．經开拓以后，这一公式对 $c=1, 0, -1, -2, \cdots$ 仍保持有效．对于 $c=2, 3, 4, \cdots$，上式的右边成为不定式，如寫成

$$-\frac{2\pi i}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a-c+r+1)}{\Gamma(2-c+r)}(-1)^r\xi^{1-c+r},$$

则 c 可使之趋近于 $1+n(n=1, 2, \cdots)$，于是結果为

(16)
$$\Delta=(-1)^{n-1}\frac{2\pi i}{\Gamma(a-n)}\Phi(a, 1+n; -\xi)$$

$$\xi>0,\ c=1+n,\ n=0, 1, 2, \cdots$$

在 $\Psi(a, c; x)$ 中如 (i) $a=0, -1, -2, \cdots$，当 Ψ 为 x 的多項式且根据 6-5 (7) 是 Φ 的一个倍数时，Ψ 是單值的，(ii) 如 $c=n+1,\ n=1, 2, \cdots,\ a$ 为整数 $1, 2, \cdots, n$ 中之一，当 6-7 (12) 表示 Ψ 是 x^{-1} 的多項式时 Ψ 也是單値的.

当 x 包圍原点时 Ψ 的性态可以由下面的公式說明

(17)
$$\Psi(a, c; xe^{2m\pi i})=e^{-2mc\pi i}\Psi(a, c; x)$$
$$+(1-e^{-2mc\pi i})\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)}\Phi(a, c; x)$$

$$m=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

6-9. 魏塔克耳函数

在有些情况下用魏塔克耳的記法可以得到便利. 魏塔克耳將合流方程寫成标准式 6-1 (4). 从 6-2 (13) 可知，如以

$$a=-1,\ b=c,\ \alpha=\gamma=0,\ \beta=-a,$$

则
$$\mathscr{F}(a, c; x)=e^{x/2}x^{-c/2}w(\kappa, \mu, x).$$

其中 $\kappa=-a+\frac{1}{2}c,\ \mu=\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}$. 魏塔克耳方程的二个解是下面两个**魏塔克耳函数**

(1)
$$M_{\kappa,\mu}(x)=e^{-x/2}x^{c/2}\Phi(a, c; x)\equiv z_1$$

(2)
$$W_{\kappa,\mu}(x)=e^{-x/2}x^{c/2}\Psi(a, c; x)=z_5,\quad a=\tfrac{1}{2}-\kappa+\mu,$$
$$c=2\mu+1.$$

反之

(3)
$$\Phi(a, c; x)=e^{x/2}x^{-\frac{1}{2}-\mu}M_{\kappa,\mu}(x)$$

(4)
$$\Psi(a, c; x)=e^{x/2}x^{-\frac{1}{2}-\mu}W_{\kappa,\mu}(x),\quad \kappa=\tfrac{1}{2}c-a,\ \mu=\tfrac{1}{2}c-\tfrac{1}{2}.$$

用 6-6 (3) 的記法，倘有

(5) $W_{\kappa,\mu}(x)=e^{-\kappa/2}x^{\kappa}\,{}_2F_0(\tfrac{1}{2}-\kappa+\mu,\tfrac{1}{2}-\kappa-\mu;\,-1/x)$.

魏氏方程 6–1 (14) 的其他解可从 6–3 及 6–7 節中導出。將 6–1 (2) 及 6–1 (4) 的对应解用同样的下标表示，則

(6) $z_2=M_{\kappa,-\mu}(x),\ z_3=M_{-\kappa,\mu}(-x),\ z_4=M_{-\kappa,-\mu}(-x),$

$z_6=W_{\kappa,-\mu}(x),\ z_7=W_{-\kappa,\mu}(-x),\ z_8=W_{-\kappa,-\mu}(-x).$

康曼尔变换式 6–3 (7) 变为

(7) $M_{\kappa,\mu}(x)=e^{i\varepsilon\pi(\frac{1}{2}+\mu)}M_{-\kappa,\mu}(-x)$

其中 $\mathrm{Im}(x)>0$ 时 $\varepsilon=1$, $\mathrm{Im}(x)<0$ 时 $\varepsilon=-1$, 变换式 6–5 (6) 变为

(8) $W_{\kappa,\mu}(x)=W_{\kappa,-\mu}(x)$.

魏塔克耳以 (1) 式定义 M, 而用一等价于 6–5 (2) 的積分表示式定义 W.

布契霍兹 (1943 及其他著作) 用如下記法

$$m_{\nu}^{(p)}(z)=(2z/\pi)^{-\frac{1}{2}}M_{\nu,\frac{1}{2}p}(z)$$
$$w_{\nu}^{(p)}(z)=(2z/\pi)^{-\frac{1}{2}}W_{\nu,\frac{1}{2}p}(z)$$

6–9–1. 貝塞尔函数

如 $\kappa=0$, 則魏塔克耳方程 6–1 (4) 可容易地簡化为貝塞尔方程 6–2 (5). 結果可寫为

$$w(0,\mu,x)=x^{\frac{1}{2}}C_{\mu}(\tfrac{1}{2}ix).$$

在 6–1 (2) 的記法中这相当于 $c=2a$. 貝塞尔函数与合流超比函数之間的关系可以概括于如下的公式中，其中貝塞尔函数使用的是标准記法 (見 Watson, 1922).

(9) $J_{\nu}(x)=\dfrac{1}{\Gamma(\nu+1)}(\tfrac{1}{2}x)^{\nu}e^{-ix}\Phi(\tfrac{1}{2}+\nu,1+2\nu;2ix)$

(10) $I_{\nu}(x)=\dfrac{1}{\Gamma(\nu+1)}(\tfrac{1}{2}x)^{\nu}e^{-x}\Phi(\tfrac{1}{2}+\nu,1+2\nu;2x)$

(11) $M_{0,\mu}(2ix)=(2ix)^{\mu+\frac{1}{2}}\Lambda_{\mu}(x)=\Gamma(\mu+1)\,i^{\mu+\frac{1}{2}}\,2^{2\mu+\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}J_{\mu}(x)$

(12) $H_{\nu}^{(1)}(x)=(\tfrac{1}{2}\pi x)^{-\frac{1}{2}}e^{i(x-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi)}\,{}_2F_0[\tfrac{1}{2}+\nu,\tfrac{1}{2}-\nu;1/(2ix)]$

$=-2i\pi^{-\frac{1}{2}}e^{i(x-\nu\pi)}(2x)^{\nu}\Psi(\tfrac{1}{2}+\nu,1+2\nu;-2ix)$

$=(\tfrac{1}{2}\pi x)^{-\frac{1}{2}}e^{-i(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{4})\pi}W_{0,\nu}(-2ix)$

(对于 $H_\nu^{(2)}$, 把 i 换为 $-i$)

(13) $K_\nu(x)=\pi^{\frac{1}{2}}e^{-x}(2x)^\nu\Psi(\frac{1}{2}+\nu,1+2\nu;2x)$

(14) $W_{0,\mu}(x)=\pi^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}K_\mu(\frac{1}{2}x)$

(15) $Y_\nu(x)=-\pi^{-\frac{1}{2}}(2x)^\nu[e^{i(\nu\pi-x)}\Psi(\frac{1}{2}+\nu,1+2\nu;2ix)$
$+e^{i(x-\nu\pi)}\Psi(\frac{1}{2}+\nu,1+2\nu;-2ix)]$.

貝塞尔函数也是合流超比函数的極限情形. 逐項取極限,得

(16) $\lim\limits_{a\to\infty}\Phi(a,c;-x/a)=\Gamma(c)x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}c}J_{c-1}(2x^{\frac{1}{2}})$

对于非整数 c 的 Ψ 函数的相应結果可从 6–5(7) 中得出. 从斯梯林公式,或更好一点从 1–18 (4) 得

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\Gamma(1+a-c)}{a^{1-c}\Gamma(a)}=1,$$

这一結果連同 (16) 式及 6–5 (7) 式表明

(17) $\lim\limits_{a\to\infty}[\Gamma(a-c+1)\Psi(a,c;-x/a)]$

$=\pi x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}c}\csc(\pi c)[J_{c-1}(2x^{\frac{1}{2}})+e^{i\pi c}J_{1-c}(2x^{\frac{1}{2}})]$

$=-i\pi e^{i\pi c}x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}c}H_{c-1}^{(1)}(2x^{\frac{1}{2}})$ $\qquad \mathrm{Im}\,x>0$,

$=i\pi e^{-i\pi c}x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}c}H_{c-1}^{(2)}(2x^{\frac{1}{2}})$ $\qquad \mathrm{Im}\,x<0$.

同理可証

(18) $\lim\limits_{a\to\infty}\Phi(a,c;x/a)=\Gamma(c)x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}c}I_{c-1}(2x^{\frac{1}{2}})$,

(19) $\lim\limits_{a\to\infty}[\Gamma(a-c+1)\Psi(a,c;x/a)]=2x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}c}K_{c-1}(2x^{\frac{1}{2}})]$.

6–9–2. 其他特殊的合流超比函数

关系式

(20) $\Phi(a,a;x)=e^x$

是很明顯的,还有許多別的特殊函数可以用合流超比函数表示. 其中的第一組是不完全 γ-函数及有关函数. 由 6–5 (2), 6–5 (6) 及 6–5 (7), 6–3 (7) 可得

(21) $\Gamma(a,x)\equiv\int_x^\infty e^{-t}t^{a-1}dt=e^{-x}\Psi(1-a,1-a;x)$,

(22) $\gamma(a,x)\equiv\Gamma(a)-\Gamma(a,x)=a^{-1}x^a\Phi(a,a+1;-x)$.

对于誤差函数

$$(23)\quad \operatorname{Erf}(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt = \tfrac{1}{2}\gamma(\tfrac{1}{2}, x^2) = x\Phi(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}; -x^2),$$

$$(24)\quad \operatorname{Erfc}(x) = \int_x^\infty e^{-t^2}dt = \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}, x^2) = e^{-x^2}\Psi(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; x^2).$$

对于指数積分，对数積分，正弦及余弦積分，弗列司納耳積分有

$$(25)\quad -\operatorname{Ei}(-x) = \int_x^\infty e^{-t}t^{-1}dt = e^{-x}\Psi(1, 1; x),$$

$$(26)\quad \operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t} = \operatorname{Ei}(\ln x) = -x\Psi(1, 1; -\ln x),$$

$$(27)\quad \operatorname{Si}(x) = \int_0^x t^{-1}\sin t\,dt = \tfrac{1}{2}\pi - \int_x^\infty t^{-1}\sin t\,dt$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}ie^{-ix}\Psi(1, 1; ix) + \tfrac{1}{2}ie^{ix}\Psi(1, 1; -ix),$$

$$(28)\quad \operatorname{Ci}(x) = -\int_x^\infty t^{-1}\cos t\,dt$$
$$= -\tfrac{1}{2}e^{-ix}\Psi(1, 1; ix) - \tfrac{1}{2}e^{ix}\Psi(1, 1; -ix),$$

$$(29)\quad C(x) = 2^{-\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}\int_0^x t^{-\frac{1}{2}}\cos t\,dt$$
$$= \pi^{-\frac{1}{2}}2^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}[\Phi(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}; -xe^{i\pi/2}) + \Phi(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}; -xe^{(i\pi/2)})],$$

$$(30)\quad S(x) = 2^{-\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}\int_0^x t^{-\frac{1}{2}}\sin t\,dt$$
$$= \pi^{-\frac{1}{2}}2^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}i\,[\Phi(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}; -xe^{i\pi/2}) - \Phi(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}; -xe^{-i\pi/2})].$$

第 8 章的拋物柱函数也是合流超比函数：

$$(31)\quad D_\nu(x) = 2^{\frac{1}{2}\nu}e^{-\frac{1}{4}x^2}\Psi(-\tfrac{1}{2}\nu, \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}x^2)$$
$$= 2^{\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4}x^2}x\Psi(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\nu, \tfrac{3}{2}; \tfrac{1}{2}x^2).$$

这些公式的特殊情形是漢米特多項式：

$$(32)\quad H_n(2^{-\frac{1}{2}}x) = 2^{\frac{1}{2}n}e^{\frac{1}{4}x^2}D_n(x) = 2^{n-\frac{1}{2}}x\Psi(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}n, \tfrac{3}{2}; \tfrac{1}{2}x^2).$$

其中 n 不为正整数.

又 $\Psi(a, 0; x) = x\Psi(a+1, 2; x)$ 是与彼得曼函数 $k_\nu(\frac{1}{2}x)$ 有关，其中 $\nu = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a$. 本來彼得曼对实数的 x 及 ν，令

$$(33)\quad k_\nu(x) = 2\pi^{-1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos(x\tan\theta - \nu\theta)\,d\theta$$

因而对于 $x>0$,

(34)　$\Gamma(\nu+1)k_{2\nu}(x)=e^{-x}\Psi(-\nu, 0; 2x)$

把这一式作为剖割平面中的k-函数的定义是有用的. 根据彼得曼原来的定义, $k_\nu(-x)=k_{-\nu}(x)$. 当用定义式(34)时, 这一公式不再成立. 代替这一公式的有

(35)　$k_{2\nu}(-\xi\pm i0)=k_{-2\nu}(\xi)-e^{\pm\nu\pi i}e^{\xi}\Phi(-\nu, 0; -2\xi)\qquad \xi>0.$

如 a 为零或負整数, 則 Φ 及 Ψ 是 x 的多項式, 与第十章中的廣义拉卄尔多項式的关系为:

(36)　$L_n^a(x)=\dfrac{(a+1)_n}{n!}\Phi(-n, a+1; x)=\dfrac{(-1)^n}{n!}\Psi(-n, a+1; x)$

$n=0, 1, 2, \cdots$

所謂拉卄尔函数, 对于任意的 ν, 都是合流超比函数的另一种記法 (Pinney, 1946).

(37)　$L_\nu^{(a)}(x)=\dfrac{1}{\Gamma(\nu+1)}\Phi(-\nu, a+1; x)$

如 $c-a-1$ 为非負整数, 則 $x^{c-1}\Psi(a, c; x)$ 为一多項式, 且

(38)　$\Psi(a, a+n+1; x)=x^{-a-n}\Psi(-n, 1-a-n; x)$

$=(a)_n x^{-a-n}\Phi(-n, 1-a-n; x)=(a)_n x^{-a-n}L_n^{(-a-n)}(x)$

$n=0, 1, 2, \cdots$

可以証明(見 Erdélyi 1937 f) 合流方程当且僅当 a 或 $c-a$ 为整数时才有一个解为初等函数的有限組合.

近代重要的是出現在几率微積分学中的泊松-查莱多項式 (Szegö 1939). 这种多項式可用合流超比函数表示为

(39)　$P_n(x)=a^{-\frac{1}{2}n}(n!)^{-\frac{1}{2}}(x-n+1)_n\Phi(-n, x-n+1; a).$

所謂托際托函数 (Heatley 1943) 可定义为:

(40)　$T(m, n, x)=x^{2n-m+1}e^{-x^2}\dfrac{\Gamma(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2})}{\Gamma(1+n)}\Phi(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}, n+1; x).$

下面的表内列出了合流超比函数的几个較为重要的特殊情形及極限情形.

合流超比函数的特殊情形

参 数	函 数
$a=1, 2, \cdots,$	不完全 γ-函数及其特殊情形
$a=0, -1, -2, \cdots,$	拉甘尔多項式
$a\to\infty$	貝塞尔函数
$c=0, c=2$	彼得曼 k-函数
$c=\frac{1}{2}, c=\frac{3}{2}$	拋物柱函数
$c=a,$	初等函数、不完全 γ-函数
$c-a=1, 2, 3, \cdots$	Φ 拉甘尔多項式
	Ψ 不完全 γ-函数
$c=2a$	貝塞尔函数
$c=a=1$	指数积分及有关函数
$a=\frac{1}{2}, c=\frac{3}{2}$	誤差函数及有关函数

6-10. 拉普拉斯变换及合流超比函数

对于 $F(t)$ 的拉普拉斯变换，我們將用如下記法

$$(1)\qquad L\{F(t); s\}=\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt=f(s)$$

有时更簡單地寫成 $L\{F\}$. 从拉普拉斯的变换理論中引用乘積公式

$$(2)\qquad L\left\{\int_0^t F_1(u)\,F_2(t-u)\,du\right\}=L\{F_1(t)\}\,L\{F_2(t)\},$$

这一式，举例說，当 $L\{F_1\}$ 及 $L\{F_2\}$ 絕对收斂时正确，复反演公式

$$(3)\qquad F(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}f(s)e^{st}\,ds$$

这一式，举例說，对 $\mathrm{Re}\,s=\gamma$, 如 $L\{F\}$ 是絕对收斂的，且 $F(x)$ 在 t 的某隣域內連續而具有有界变分时成立．無窮積分一般是一柯西主值，即当 $A\to\infty$ 时为 $\int_{\gamma-iA}^{\gamma+iA}$. 不过，如 $f(s)$ 在 $\mathrm{Re}\,s=\gamma$ 上絕对可積，则 (3) 式的積分就可簡單地寫为 $\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}$.

有很多对拉普拉斯变换中出現有合流超比函数．我們可將

6–5 (2) 重行寫成

(4) $L\{t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}\}=\Gamma(a)\Psi(a,c;x)\quad \mathrm{Re}\,a>0,\ \mathrm{Re}\,s>0.$

而且对于 $\mathrm{Re}\,b>0$, $\mathrm{Re}\,s>\mathrm{Max}\ (0,\ \mathrm{Re}\,k)$, 有

(5) $$L\{t^{b-1}\Phi(a,c;kt)\}=\Gamma(b)s^{-b}F(a,b;c;ks^{-1}),\quad |s|>|k|,$$
$$=\Gamma(b)(s-k)^{-b}F[c-a,b;c;k/(k-s)],\ |s-k|>|k|.$$

上面的第一式可將 Φ 的冪級数逐項積分而得出,也可从 6–5 (1) 式及高斯級数的欧拉積分中得出;第二式可从第一式的欧拉变换中得出. 如 k 为負实数,只要 $\mathrm{Re}\,a>\mathrm{Re}\,b$, 則在 (5) 式中可令 $s\to 0$. 当 $b=c$, (5) 式有較簡單形式为:

(6) $L\{t^{c-1}\Phi(a,c;t)\}=\Gamma(c)s^{-c}(1-s^{-1})^{-a},\ \mathrm{Re}\,c>0,\ \mathrm{Re}\,s>1.$

从 (5), 6–5 (7) 及 2–9 (33) 式可得

(7) $$L\{t^{b-1}\Psi(a,c;t)\}$$
$$=\frac{\Gamma(b)\Gamma(b-c+1)}{\Gamma(a+b-c+1)}F(b,b-c+1;a+b-c+1;1-s^{-1})$$
$$\mathrm{Re}\,b>0,\ \mathrm{Re}\,c<\mathrm{Re}\,b+1,\ |1-s|<1,$$
$$=\frac{\Gamma(b)\Gamma(b-c+1)}{\Gamma(a+b-c+1)}s^{-b}F(a,b;a+b-c+1;1-s^{-1})$$
$$\mathrm{Re}\,s>\tfrac{1}{2}.$$

这个結果可以寫成几种等价的形式;并可用解析开拓向半平面 $\mathrm{Re}\,s>0$ 推廣. 如 $\mathrm{Re}\,a>\mathrm{Re}\,b$, 則在 (7) 式中可令 $s\to +0$.

另一拉普拉斯变换对可用韋勃的第一指数積分得出

(8) $$L\{t^{a-\frac{1}{2}\nu-1}J_\nu(2t^{\frac{1}{2}})\}=\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(\nu+1)}s^{-a}\Phi(a,\nu+1;-s^{-1})$$
$$\mathrm{Re}\,a>0,\ \mathrm{Re}\,s>0.$$

同樣有

(9) $$L\{t^{a-\frac{1}{2}\nu-1}K_\nu(2t^{\frac{1}{2}})\}=\tfrac{1}{2}\Gamma(a)\Gamma(a-\nu)s^{-a}\Psi(a,\nu+1;s^{-1})$$
$$\mathrm{Re}\,a>0,\ \mathrm{Re}\,a>\mathrm{Re}\,\nu,\ \mathrm{Re}\,s>0.$$

C. S. 梅杰導出了一个等价于 $W_{\kappa,\mu}$ 的積分表示式的关系:

(10) $$L\{t^{c-1}F(a,b;c;-t)\}=\Gamma(c)s^{a-c}\Psi(a,a-b+1;s)$$
$$\mathrm{Re}\,c>0,\ \mathrm{Re}\,s>0.$$

另外一組变换对为

(11) $$L\{e^{-t^2}t^{2c-2}\Phi(a,c;t^2)\}=2^{1-2c}\Gamma(2c-1)\Psi(c-\tfrac{1}{2},a+\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{4}s^2)$$
$$\operatorname{Re} c>\tfrac{1}{2},\ \operatorname{Re} s>0.$$

在魏塔克耳的記法中，主要公式为

(12) $$L\{e^{\frac{1}{2}t}t^{\alpha}M_{\kappa,\mu}(t)\}=\Gamma(\alpha+\mu+\tfrac{3}{2})\,s^{-\alpha-\mu-3/2}$$
$$\times F(\alpha+\mu+\tfrac{3}{2},\ \mu-\kappa+\tfrac{1}{2};\ 2\mu+1;\ s^{-1})$$
$$\operatorname{Re}(\alpha+\mu+\tfrac{3}{2})>0,\ \operatorname{Re} s>0,$$

(13) $$L\{e^{\lambda t}t^{\mu-\frac{1}{2}}M_{\kappa,\mu}(t)\}$$
$$=\Gamma(2\mu+1)\,(s-\lambda-\tfrac{1}{2})^{\kappa-\mu-\frac{1}{2}}(s-\lambda+\tfrac{1}{2})^{-\kappa-\mu-\frac{1}{2}}$$
$$\operatorname{Re}\mu>-\tfrac{1}{2},\ \operatorname{Re} s>\operatorname{Re}\lambda-\tfrac{1}{2},$$

(14) $$L\{e^{\frac{1}{2}t}t^{\alpha}W_{\kappa,\mu}(t)\}$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha+\mu+\frac{3}{2})\Gamma(\alpha-\mu+\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha-\kappa+2)}s^{-\alpha-\mu-3/2}$$
$$\times F(\alpha+\mu+\tfrac{3}{2},\ \mu-\kappa+\tfrac{1}{2};\ \alpha-\kappa+2;\ 1-s^{-1})$$
$$\operatorname{Re}(\alpha\pm\mu+\tfrac{3}{2})>0,\ \operatorname{Re} s>0.$$

从乘積定理 (2) 及公式 (6) 可得 Φ 的**積分加法定理**：

(15) $$\int_0^t \frac{u^{c-1}}{\Gamma(c)}\Phi(a,c;u)\frac{(t-u)^{c'-1}}{\Gamma(c')}\Phi(a',c';t-u)\,du$$
$$=\frac{t^{c+c'-1}}{\Gamma(c+c')}\Phi(a+a',c+c';t)\qquad \operatorname{Re} c>0,\ \operatorname{Re} c'>0.$$

在 $a'=0$ 的特殊情形可以特为提出一下，这时

(16) $$\int_0^t u^{\gamma-1}(t-u)^{c-\gamma-1}\Phi(a,\gamma;u)\,du$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(c-\gamma)}{\Gamma(c)}\Phi(a,c;t)\qquad \operatorname{Re} c>\operatorname{Re}\gamma>0.$$

6-11. 積分表示式

在本節里的基礎積分表示式將以圍道積分來推廣. 其他的積分表示式亦將一并列出.

6-11-1. Φ-函数

積分表示式 6-5 (1) 以 β-函数第一类欧拉積分式 1-5 (1) 为根据. 像 1-6 節中一样，用复数積分可將參数的限制条件部分地

或全部地移去．应用 1-6 (6), 1-6 (7) 或 1-6 (8) 代替 1-5 (1), 可得積分表示式如下：

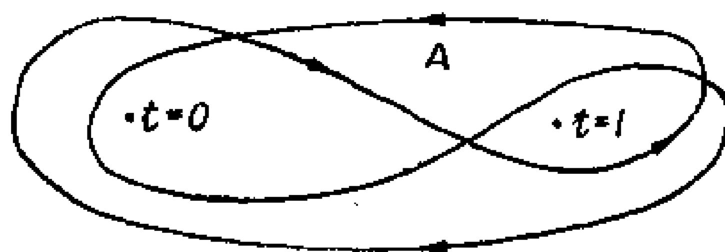
(1)
$$\Phi(a, c; x) = (2\pi i)^{-2} e^{-i\pi c}\Gamma(1-a)\,\Gamma(c)\,\Gamma(15+a-c) \times \int^{(1+,0+,1-,0-)} e^{xt} t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,dt,$$

(2)
$$\Phi(a, c; x) = (2\pi i)^{-1}\Gamma(c)\,\Gamma(a-c+1)/\Gamma(a) \times \int_0^{(1+)} e^{xt} t^{a-1}(t-1)^{c-a-1}\,dt \qquad \operatorname{Re} a>0,$$

(3)
$$\Phi(a, c; x) = -(2\pi i)^{-1}\Gamma(c)\,\Gamma(1-a)/\Gamma(c-a) \times \int_1^{(0+)} e^{xt}(-t)^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,dt \qquad \operatorname{Re}(c-a)>0.$$

在 (1) 式中，積分圍道是一双重迴綫，由实 t 軸上 0 与 1 之間的一点 A 开始 [在 A 上, $\arg t = \arg(1-t) = 0$], 先在正方向内圍繞 $t=1$, 而后在正方向内圍繞 $t=0$, 再在負方向内圍繞 $t=1$, 最后在負方向内圍繞 $t=0$, 而后回至点 A.

在 (2) 式中，積分圍道是一迴綫，起迄于 $t=0$, 并在正方向内圍繞 $t=1$ 一次．同样在 (3) 式中，圍綫起迄于 $t=1$, 而在正方向内圍繞 $t=0$ 一次．在 (2) 及 (3) 式中，各指数均取主值．



(1+, 0+, 1-, 0-)

Φ 函数也可用貝塞尔函数來表示．从 6-10 (16) 取 $\gamma=2a$, 及 6-9 (10) 得

(4)
$$\Gamma(a)\,\Gamma(c-2a)\,\Phi(a, c; x) = \pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(c)\,x^{\frac{1}{2}-a} \times \int_0^1 e^{\frac{1}{2}xt} t^{a-\frac{1}{2}}(1-t)^{c-2a-1} I_{a-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}xt\right)dt$$

$$\operatorname{Re} c>2,\ \operatorname{Re} a>0,$$

又从 6-10 (8), 將記法稍加变更，得

(5) $$\Gamma(c-a)\Phi(a,c;x)=\Gamma(c)e^{x}x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}c}\times\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{1}{2}c-a-\frac{1}{2}}J_{c-1}[2(xt)^{\frac{1}{2}}]\,dt$$

$\operatorname{Re} c>\operatorname{Re} a>0,\ \operatorname{Re} x>0$

其他的積分表示式可用复反演公式 6-10 (3) 及拉普拉斯变换式 6-10 (5), 取 $k=1$ 与 6-10 (6) 得出.

(6) $$\Phi(a,c;t)=(2\pi i)^{-1}\Gamma(b)t^{1-b}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}s^{-b}F(a,b;c;s^{-1})\,ds.$$

$\operatorname{Re} b>0,\ \gamma>1,$

(7) $$\Phi(a,c;t)=(2\pi i)^{-1}\Gamma(c)t^{1-c}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}s^{-c}(1-s^{-1})^{-a}\,ds$$

$\operatorname{Re} c>0,\ \gamma>1.$

如 (6) 式中, $b=n+1$, $n=0,1,2,\cdots$, 則被積函数是 s 的單値函数, 積分路徑可用一閉合圍綫, 如圓 $|s|=\rho>1$ 來代替.

(8) $$\Phi(a,c;t)=(2\pi i)^{-1}n!\,t^{-n}\int_c e^{st}s^{-n-1}F(a,n+1;c;s^{-1})\,ds$$

$n=0,1,2,\cdots$

6-11-2. Ψ-函数

对 Ψ-函数作相似的討論可得如下的積分表示式:

(9) $$\Psi(a,c;x)=(2\pi i)^{-1}e^{-a\pi i}\Gamma(1-a)\int_{\infty e^{i\phi}}^{(0+)}e^{-xt}t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}\,dt$$

$-\frac{1}{2}\pi<\phi+\arg x<\frac{1}{2}\pi$, 在迴綫起点上 $\arg t=\phi$,

(10) $$\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)\Psi(a,c;x)=2x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}c}\int_0^\infty e^{-t}t^{a-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}}K_{c-1}[2(xt)^{\frac{1}{2}}]\,dt$$

$\operatorname{Re} a>0,\ \operatorname{Re}(a-c)>-1,$

(11) $$\Gamma(b)\Psi(a,c;x)=x^{a-b}\int_0^\infty e^{-xt}t^{b-1}F(a,a-c+1;b;-t)\,dt$$

$\operatorname{Re} b>0,\ \operatorname{Re} x>0,$

(12) $\Gamma(a+b-c+1)\,\Psi(a,c;t)=(2\pi i)^{-1}\Gamma(b)\Gamma(b-c+1)t^{1-b}$

$$\times\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}s^{-b}F(a,b;a+b-c+1;1-s^{-1})\,ds$$

$$\operatorname{Re} b>0,\ \operatorname{Re}(b-c)>-1,\ \gamma>\tfrac{1}{2}.$$

对于 $x>0$, 下面的积分表示式可从 6-5 (2) 式中導出. 我們設 $\operatorname{Re} a>0$, $\operatorname{Re} c<1$, $x>0$. 則我們尽可以將積分路徑变形为 $t=0$ 至 $t=-\frac{1}{2}$ 的一段实軸,及从 $t=-\frac{1}{2}$ 至 $t=-\frac{1}{2}+i\infty$ 的一条射綫. 沿着 $(0,-\frac{1}{2})$ 令 $t=ue^{i\pi}$; 沿着 $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}+i\infty)$ 令

$$t=\tfrac{1}{2}e^{i(\pi-\theta)}\sec\theta,\ 1+t=\tfrac{1}{2}e^{i\theta}\sec\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\tfrac{1}{2}\pi).$$

于是可得

$$e^{-i\pi a}\Gamma(a)\,\Psi(a,c;x)=\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-ux}u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}du$$

$$-i2^{1-c}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\cos\theta)^{-c}\exp[\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}ix\tan\theta+(c-2a)i\theta]\,d\theta.$$

如將積分路徑变形为 $(0,-\frac{1}{2})$ 的一段,在这一段上 $t=ue^{-i\pi}$, 及射綫 $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}-i\infty)$, 沿着这一綫 $t=\frac{1}{2}e^{i(\theta-\pi)}\sec\theta$ 則可得与上式对应的公式. 將所得两式相減,得

(13) $\pi\Psi(a,c;x)=2^{1-c}\Gamma(1-a)\,e^{\frac{1}{2}x}$

$$\times\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\cos\theta)^{-c}\cos[\tfrac{1}{2}x\tan\theta+(2a-c)\theta]\,d\theta$$

$$x>0,\ \operatorname{Re} c<1,\ a\neq1,2,\cdots$$

在導出这些公式时所用的条件 $\operatorname{Re} a>0$ 可以用解析开拓移去. 不过,对 a 將加以一个新的条件,借以避免 γ-函数的極点. 公式(13)相当于彼得曼 k-函数的積分表示式 6-9 (29).

还有两个積分表示式系由 C. S. 梅杰 (1938, 1941) 導出,如下

(14) $\Psi(a,c;x)=x^{a-1}\int_0^{\infty}e^{-\frac{1}{2}x\operatorname{ch}2t}P_\nu^\mu(\operatorname{ch}t)\,(2\operatorname{sh}t)^{1-\mu}\,dt$

$$\mu=c-2a+\tfrac{1}{2},\ \nu=c-\tfrac{3}{2},\ \operatorname{Re} x>0,\ \operatorname{Re}\lambda<1,$$

(15) $\Psi(a,c;x)=\pi^{-\frac{1}{2}}2^{a-\frac{1}{2}c+1}e^{\frac{1}{2}x}x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}c}$

$$\times\int_0^{\infty}e^{\frac{1}{2}(\operatorname{sh}t)^2}D_{c-2a}[(2x)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}t]\operatorname{ch}[(c-1)t]\,dt$$

$$\operatorname{Re} x>0.$$

6-11-3. 魏塔克耳函数

魏塔克耳合流超比函数的基礎積分表示式为

(16) $\Gamma(\frac{1}{2}-\kappa+\mu)\,\Gamma(\frac{1}{2}+\kappa+\mu)\,M_{\kappa,\mu}(x)$

$$=2^{-2\mu}\Gamma(2\mu+1)\,x^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-1}^{1}e^{\frac{1}{2}xt}(1-t)^{-\frac{1}{2}+\kappa+\mu}(1+t)^{-\frac{1}{2}-\kappa+\mu}\,dt$$

$\mathrm{Re}\,(\mu\pm\kappa)>-\frac{1}{2}$,

(17) $\Gamma(\frac{1}{2}+\kappa+\mu)\,M_{\kappa,\mu}(x)$

$$=\Gamma(2\mu+1)e^{\frac{1}{2}x}x^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{\infty}e^{-t}t^{\kappa-\frac{1}{2}}J_{2\mu}[2(tx)^{\frac{1}{2}}]\,dt$$

$\mathrm{Re}\,(\mu+\kappa)>-\frac{1}{2}$,

(18) $\Gamma(\frac{1}{2}-\kappa+\mu)\,W_{\kappa,\mu}(x)$

$$=e^{-\frac{1}{2}x}x^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{0}^{\infty}e^{-tx}t^{-\frac{1}{2}-\kappa+\mu}(1+t)^{-\frac{1}{2}+\kappa+\mu}\,dt$$

$\mathrm{Re}\,(\mu-\kappa)>-\frac{1}{2}$, $\mathrm{Re}\,x>0$.

(19) $W_{\kappa,\mu}(x)=(2\pi i)^{-1}e^{-\frac{1}{2}x}x^{\kappa}$

$$\times\int_{-\infty i}^{\infty i}\frac{\Gamma(s)\Gamma(\frac{1}{2}-\kappa-\mu-s)\Gamma(\frac{1}{2}-\kappa+\mu-s)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\kappa-\mu)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\kappa+\mu)}x^{s}\,ds.$$

$-\frac{3}{2}\pi<\arg x<\frac{3}{2}\pi$,

式中 $\frac{1}{2}+\kappa+\mu$ 及 $\frac{1}{2}+\kappa-\mu$ 都不是正整数，積分路徑將 $\Gamma(s)$ 的極点从 $\Gamma(\frac{1}{2}-\kappa-\mu-s)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\kappa+\mu-s)$ 的極点中分离开來.

6-12. 以拉甘尔多項式及貝塞尔函数表示的展开式

合流超比函数除了冪級数展开式外，尙有几个别的有用的展开式：

在 6-11 (9) 中令 $\phi=0$, $c=a+1$, $t=u/(1-u)$, 得

(1) $\Psi(a,\,a+1;\,x)=(2\pi i)^{-1}e^{i\pi a}\Gamma(1-a)$

$$\times\int_{1}^{(0+)}e^{-xu/(1-u)}u^{a-1}(1-u)^{-a-1}\,du$$

令

(2) $(1-u)^{-a-1}e^{-xu/(1-u)}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{(a)}(x)\,u^n$ $\qquad|u|<1$,

是廣义拉甘尔多項式熟知的母函数[見 Szegö 1936, (5-1-9)]. 由于这个級数只在單位圓 $|u|<1$ 内收斂,故可寫 $\int_1^{(0+)} = \lim \int_v^{(0+)}$, $v \to 1-$ 來代替 (2), 由于

$$\int_v^{(0+)} u^{a+n-1}\,du = 2ie^{i\pi a}\sin(a\pi)\,v^{n+a}/(n+a),$$

因而得

$$\Gamma(a)\,\Psi(a, a+1; x) = \lim_{v\to 1-} v^a \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-1} v^n L_n^{(a)}(x)$$

根据阿培耳的冪級数連續性定理,只要無窮級数收斂,則

$$(3)\qquad \Gamma(a)\,\Psi(a, a+1; x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-1} L_n^{(a)}(x).$$

从廣义拉甘尔多項式的已知估計 (Szegö 1939 定理 7-6-4) 中可知如 $a<\frac{1}{2}$, 則这一級数在 x 的任何有限的正值区間内收斂. 另一方面,应用变換式 6-5 (6), 可得

$$(4)\qquad \Gamma(a-\alpha)\,\Psi(a, a+1; x) = x^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (n+a-\alpha)^{-1} L_n^{(-\alpha)}(x)$$

式中級数当 $a>-\frac{1}{2}$ 时收斂(对于正的 x). 在正实軸之外,上述二級数均發散. 展开式(2)及(4)系由特列柯米所導出. 另一个以拉甘尔多項式表示的展开式为

$$(5)\qquad \Phi[a, c; xy(x-1)^{-1}] = (1-x)^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} L_n^{(c-1)}(y)\,x^n$$

$$|x|<1,\ y>0$$

这一式是 (2) 的推廣,当 $x=\frac{1}{2}$ 时,可得一負实軸上以拉甘尔多項式表示的 Φ 的展开式. 上式系由 A. 爱尔台里導出[見 1937 a, 方程 (5, 7)].

特列柯米 (1947, 1949) 曾導出了以貝塞尔函数表示的两个 Φ 的展开式. 这些展开式在研究参数較大的 Φ 性态时有用. 第一个展开式为

$$(6)\qquad \Phi(-a, \alpha+1; x)$$

$$= \Gamma(\alpha+1)(ax)^{-\frac{1}{2}\alpha} e^{hx} \sum_{m=0}^{\infty} A_m(h)(x/a)^{\frac{1}{2}m} J_{\alpha+m}[2(ax)^{\frac{1}{2}}]$$

式中 a 为实数，$h\geqslant 0$，系数 A_m 系由如下母函数所决定

(7) $$\sum_{m=0}^{\infty} A_m(h) z^m = e^{az}[1+(h-1)z]^a (1+hz)^{-a-\alpha-1}.$$

从高階貝塞耳函数的漸近表示式可知 (6) 中的無窮級数随

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m(h) x^m / \Gamma(\alpha+m+1)$$

收斂而收斂，因而可知它在复数 x 平面的每一有界区域中絕对而一致收斂．从 (7) 式可得

(8) $$A_0=1,\ A_1=-(\alpha+1)h,\ A_2=(h-\tfrac{1}{2})a+\tfrac{1}{2}(\alpha+1)(\alpha+2)h^2.$$

对于以后的 A，有遞推关系

(9) $$(m+1)A_{m+1}=[(1-2h)m-h(\alpha+1)]A_m-[(1-2h)a+h(h-1)(\alpha+m)]A_{m-1}+h(h-1)aA_{m-2}$$
$$m=2,3,4\cdots$$

又

(10) $$A_m(0)=(-1)^m L_m^{(\alpha-m)}(a),\quad A_m(1)=L_m^{-(a+m+\alpha+1)}(-a),$$

如 $a=n=0,1,2,\cdots$，则

$$A_m(h)=h^{m-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(h-1)^{n-k}L_m^{-(k+m+\alpha+1)}(-a/h).$$

A 为 a, α, h 的多项式，A_m 对 a 的次数当 $h\neq\frac{1}{2}$ 时为 $[\frac{1}{2}m]$，当 $h=\frac{1}{2}$ 时为 $[m/3]$（$[b]$ 为最大整数 $\leqslant b$）．对 h 的选擇，最適当的是 $\frac{1}{2}$．

特列柯米的第二个展开式为

(11) $$e^{-\frac{1}{2}x}\Phi(a,\alpha+1;x)=\Gamma(\alpha+1)(\kappa x)^{-\frac{1}{2}\alpha}\times\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\kappa,\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\alpha)(\tfrac{1}{4}\kappa^{-1}x)^{\frac{1}{2}n}J_{\alpha+n}(2\kappa^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}})$$

式中 $\kappa=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha-a$ 为魏塔克耳参数，$A_m(\kappa,\lambda)$ 为如下展开式中的系数

(12) $$e^{2\kappa z}(1-z)^{\kappa-\lambda}(1+z)^{-\kappa-\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\kappa,\lambda)z^n \qquad |z|<1.$$

特列柯米 (1950) 曾証明，根据(6)式中的同样理由，(11)式的無窮級数在整个 x 平面内收斂．此外，(11) 还可以用以近似地計算較

大 κ 的 Φ 函数．从 (12) 式可得

(13) $A_0(\kappa,\lambda)=1,\ A_1(\kappa,\lambda)=0,\ A_2(\kappa,\lambda)=\lambda,$

$$A_3(\kappa,\lambda)=-\frac{2}{3}\kappa,\ A_4(\kappa,\lambda)=\frac{1}{2}(\lambda)_2$$

$$A_5(\kappa,\lambda)=-2\left(\frac{1}{3}\lambda+\frac{1}{5}\right)\kappa,\ A_6(\kappa,\lambda)=\frac{1}{3!}(\lambda)_3+\frac{2}{9}\kappa^2,$$

$$(n+1)A_{n+1}(\kappa,\lambda)=(n+2\lambda-1)A_{n-1}(\kappa,\lambda)-2\kappa A_{n-2}(\kappa,\lambda)$$
$$n=2,3,\cdots.$$

A_n 为 κ 的多项式，其次数为 $[n/3]$．又

(14) $A_n(-\kappa,\lambda)=(-1)^n A_n(\kappa,\lambda)$

关于这些系数的其他細節可参看特列柯米的著作 (1949)．

6-13. 漸近性态

合流超比函数的漸近性态随变数，一个或二个参数，或所有这三个数是大的量而不同．到现在还沒有一組完全的結果．

漸近性态的研究，以積分表示式或微分方程，或甚至以適当展开的無窮級数为依据．

6-13-1. 大 $|x|$ 的性态

合流超比函数当 $x\to\infty$ 时的性态可借基礎積分表示式來研究．如果在 6-5 (3) 式中令

$$(1+t)^{c-a-1}=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n(a-c+1)_n\frac{t^n}{n!}+R_N$$

并估計包含 R_N 的積分，可知

(1) $$\psi(a,c;x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{(a)_n(a-c+1)_n}{n!}x^{-a-n}+O(|x|^{-a-N-1})$$
$$N=0,1,2,\cdots,\ x\to\infty,\ -\tfrac{3}{2}\pi<\arg x<\tfrac{3}{2}\pi.$$

在 6-5 (5) 式中，將積分路徑移向左边，只要通过 $\Gamma(a+s)$ 的一个極就計算其留数并估計余項的積分可得同样的結果．这一結果是与 6-6 (3) 一致的，这說明(發散的)形式冪級数 ${}_2F_0$ 是 6-6 (3)所

定义的解析函数在適当扇形内的漸近展开式.

Φ 的性态可从 6-7 (7) 中推出.

(2)
$$\Phi(a,c;x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}(e^{i\pi\varepsilon}/x)^{a}\sum_{n=0}^{M}\frac{(a)_n(a-c+1)_n}{n!}(-x)^{-n}$$
$$+O(|x|^{-a-M-1})+\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}e^{x}x^{a-c}\sum_{n=0}^{N}\frac{(c-a)_n(1-a)_n}{n!}x^{-n}$$
$$+O(|e^{x}x^{a-c-N-1}|)\qquad M,N=0,1,2,\cdots,$$

如 $\operatorname{Im}x>0,\varepsilon=1$, 如 $\operatorname{Im}x<0,\varepsilon=-1,x\to\infty,-\pi<\arg x<\pi$,

特別是,如 $\operatorname{Re}x\to\infty$, 則

(3)
$$\Phi(a,c;x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}e^{x}x^{a-c}[1+O(|x|^{-1})],$$

如 $\operatorname{Re}x\to-\infty$, 則

$$\Phi(a,c;x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}(-x)^{-a}[1+O(|x|^{-1}].$$

6-13-2. 大的参数

如 $c\to\infty$ 而 a 及 x 有界,則 6-1 (1) 說明了 Φ 的性态. 特別是

(4)　$\Phi(a,c;x)=1+O(|c|^{-1})$　　　a,x 有界, $c\to\infty$

当 $c-a$ 及 x 为有界而如 $c\to\infty$, 則 6-3 (7) 式就具有这样的幕狀. 特別是

(5)　$\Phi(a,c;x)=e^{x}[1+O(|c|^{-1})]$　　　$c-a$, x 有界, $c\to\infty$.

Ψ 的性态在这种情况下可以借 6-5 (7), 1-18 (3) 及 1-18 (4) 式來研究.

(6)
$$\Psi(a,c;x)=(-c)^{-a}[1+O(|c|^{-1})]$$
$$+(2\pi)^{\frac{1}{2}}x^{1-c}\exp[x-c+(c-\tfrac{3}{2})\ln c][1+O(|c|^{-1})]$$

a,x 有界, $c\to\infty$, $|\arg c|\leqslant\pi-\varepsilon$, $|\arg(-c)|\leqslant\pi-\varepsilon$, $\varepsilon>0$.

当 $c-a$ 及 x 保持有界而 $c\to\infty$ 时的对应結果可从 6-5 (6) 式得出.

$a\to\infty$ 的情形是比較困难的. 潘隆 (1921) 对这种情形的研究以拉普拉斯型積分表示式为基礎,并运用最陡下降法. 在以后的

許多研究者中，我們特別要提出的是 F. 特列柯米(1947)和 W. C. 台劳(1939). 特列柯米証明在某种限制条件下他的展开式 6–12(11) 是一个漸近展开式，台劳应用微分方程解的漸近表示的 E. R. 倫乔法，他的結果在 6–13–3 節中說明．如 x 为有界，且有界于零点之外，它們就可大大簡化．在下面的公式中，c 有界，x 有界且有界于零点之外，$a\to\infty$. 將这些公式用

(7)　$\kappa=\frac{1}{2}c-a$

表示將更方便．假定 $|\arg x-\arg\kappa|\leqslant\pi$. 于是可得下表，其中 ε 为任意正数：

	$\arg\kappa$ 的区間	$\kappa^{\frac14-\kappa}x^{\frac14+\frac12 c}e^{\kappa-\frac12 x}\psi(a,c;x)=$
(8)	$-\pi+\varepsilon,\ \pi-\varepsilon$	$2^{\frac12}\cos[\kappa\pi-2(\kappa x)^{\frac12}-\frac14\pi]\cdot[1+O(\lvert\kappa\rvert^{-\frac12})]$
(9)	$\varepsilon,\ 3\pi-\varepsilon$	$\frac12(1+i)\exp[-i\kappa\pi+2i(\kappa x)^{\frac12}]\cdot[1+O(\lvert\kappa\rvert^{-\frac12})]$
(10)	$2\pi+\varepsilon,\ 4\pi-\varepsilon$	$i2^{\frac12}\cos[\kappa\pi-2(\kappa x)^{\frac12}+\frac14\pi]\cdot[1+O(\lvert\kappa\rvert^{-\frac12})]$
(11)	$3\pi+\varepsilon,\ 6\pi-\varepsilon$	$-\frac12(1-i)\exp[i\kappa\pi-2i(\kappa x)^{\frac12}]\cdot[1+O(\lvert\kappa\rvert^{-\frac12})]$

Φ 的漸近式，在同样条件下可从 6–7 (7) 中得出为：

(12)　$$\Phi(a,c;x)=2^{\frac12}\Gamma(c)e^{\frac12 x}\kappa^{3/4-\frac12 c}x^{3/4-\frac12 c}\{c_1e^{2i(\kappa x)^{\frac12}}+c_2e^{-2i(\kappa x)^{\frac12}}+(\kappa x)^{-\frac12}O[\exp|\operatorname{Im}(2\kappa^{\frac12}x^{\frac12})|]\}$$

如 s 为一整数，则

(13)　$$c_1=(2\pi)^{-\frac12}e^{i\pi(s-\frac14)(2c-1)}\qquad (2s-2)\pi+\varepsilon\leqslant\arg(\kappa x)^{\frac12}\leqslant(2s+1)\pi-\varepsilon,$$

(14)　$$c_2=(2\pi)^{-\frac12}e^{i\pi(s+\frac14)(2c-1)}\qquad (2s-1)\pi+\varepsilon\leqslant\arg(\kappa x)^{\frac12}\leqslant(2s+2)\pi-\varepsilon.$$

台劳又導出了一个 Φ 的漸近式，在 $x=0$ 的鄰域内一致有效．如 κx 有界

(15)　$$\Phi(a,c;x)=\Gamma(c)(\kappa x)^{\frac12-\frac12 c}e^{\frac12 x}J_{c-1}[2(\kappa x)^{\frac12}]+O(|\kappa|^{-1})\qquad c,\ \kappa x\ \text{有界},\ \kappa\to\infty.$$

a, c 及 $c-a$ 同时 $\to\infty$ 的情形尚未全部研究过．但在如下条件下則是已知的．

(16)　$a=\nu A+\alpha,\ c-a=\nu B+\beta$

此处 α, β 是固定的数，可能是复数，A, B 为固定的正数，ν 通过正值 $\to\infty$，如应用代表符号

$$t=-A/(A+B),\ u=A(1+t)=AB/(A+B),\ 则$$

(17) $$\Phi(a,c;x)=\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\Gamma(c)}{(u\nu)^{\frac{1}{2}}\Gamma(a)\Gamma(c-a)}e^{-t\alpha}(-t)^{a}(1+t)^{c-a}[1+O(\nu^{-1})].$$

还可参看 6-13-3.

6-13-3. 变数及参数均大的情形

如 a 有界且 c 及 $x\to\infty$ 使 $|x|<|c|$，则 Φ 的性态可借 6-1(1) 來研究．令 $x=c\xi$, $0<|\xi|\leqslant 1-\varepsilon(\varepsilon>0)$，并应用 1-18(4)．則当 $c\to\infty$ 时有

$$\frac{1}{(c)_n}=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)}=c^{-n}[1-\tfrac{1}{2}n(n-1)c^{-1}+O(|c|^{-2})]$$

(18) $$\Phi(a,c;c\xi)=(1-\xi)^{-a}\left[1-\frac{a(a+1)}{2c}\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^2+O(|c|^{-2})\right]$$

a 有界，$|\xi|\leqslant 1-\varepsilon,\ \varepsilon>0.$

$c-a$ 有界而 $c, x\to\infty$ 的对应公式可借康曼尔变换得出，Ψ 的公式可借 6-5 (7) 式推出。

当 a 及 x 作不定增加时，合流超比函数的性态要复雜得多．W. C. 台劳(1939)曾应用 E. R. 倫乔的方法从微分方程中導出合流超比函数的漸近式。这里我們仍用

(19) $$\kappa=\tfrac{1}{2}c-a.$$

台劳引用輔助变数

(20) $$\xi=i\{\tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}(x-4\kappa)^{\frac{1}{2}}-\kappa\ln[(x^{\frac{1}{2}}+(x-4\kappa)^{\frac{1}{2}})^2/(4\kappa)]\},$$

式中 x, κ, 及 $x-4\kappa$ 的幅角当这些量均为正数时都等于零，当这些量取其他数值时，它們的幅角可用解析开拓得出，在整个开拓过程中应使 $|\arg x-\arg\kappa|<\pi$．起先台劳研究了 Ψ 在 $\xi\to\infty$, r, N 为常数而 $0\leqslant r\leqslant 1$, $N>0$, 且当 $\kappa\to\infty$ 时 $|x|>N|\kappa|^{-1+2r}$ 的假設下的漸近性态．在这种情况下他所得的結果如下:

	$\arg\xi$ 的区间	$\kappa^{-\kappa}x^{\frac{1}{2}c-\frac{1}{4}}(x-4\kappa)^{\frac{1}{4}}e^{\kappa-\frac{1}{2}x}\Psi(a, c; x)=$
(21)	$-2\pi+\varepsilon,\ -\varepsilon$	$(e^{i\xi}-ie^{-i\xi})[1+O(\|\kappa\|^{-r})+O(\|\xi\|^{-1})]$
(22)	$-\pi+\varepsilon,\ 2\pi-\varepsilon$	$e^{i\xi}[1+O(\|\kappa\|^{-r})+O(\|\xi\|^{-1})]$
(23)	$\pi+\varepsilon,\ 3\pi-\varepsilon$	$(e^{i\xi}+ie^{-i\xi})[1+O(\|\kappa\|^{-r})+O(\|\xi\|^{-1})]$
(24)	$2\pi+\varepsilon,\ 5\pi-\varepsilon$	$ie^{-i\xi}[1+O(\|\kappa\|^{-r})+O(\|\xi\|^{-1})]$

对于有界的 ξ，或 $x-4\kappa=O(|\kappa|^{\frac{1}{3}})$，台劳有如下的渐近式

(25) $$\kappa^{-\kappa}x^{\frac{1}{2}c-\frac{1}{4}}(x-4\kappa)^{\frac{1}{4}}e^{\kappa-\frac{1}{2}x}\Psi(a, c; x)$$
$$=[2\pi\xi/(3i)]^{\frac{1}{2}}[e^{i\pi/6}J_{-\frac{1}{3}}(\xi)-e^{-i\pi/6}J_{\frac{1}{3}}(\xi)]+O(|\kappa|^{-5/6})$$
$$x-4\kappa=O(|\kappa|^{\frac{1}{3}}),\ \kappa\to\infty$$

对于 Φ，有

(26) $$(\kappa x)^{\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x}\Phi(a, c; x)$$
$$=\Gamma(c)J_{c-1}[2(\kappa x)^{\frac{1}{2}}]+\kappa^{-3/4}x^{5/4}O[\exp|\mathrm{Im}(2\kappa^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}})|]$$
$$c,\ \arg x,\ \arg\kappa \text{ 有界},\ x=O(|\kappa|^{\frac{1}{3}-\delta}),\ \kappa\to\infty.$$

如 κx 是大的，则贝塞尔函数可以初等函数來表示，

$$J_c(2\kappa^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}})=2^{-\frac{1}{2}}\kappa^{-\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{4}}\{c_1e^{2i(\kappa x)^{\frac{1}{2}}}+c_2e^{-2i(\kappa x)^{\frac{1}{2}}}$$
$$+(\kappa x)^{-\frac{1}{2}}O[\exp|\mathrm{Im}(2\kappa^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}})|]\}$$

式中的 c_1 及 c_2 与 (13) 及 (14) 中的一样。

大的 a 及大的 x 的另一結果是特列柯米展开式 6-12 (10)，如 $\kappa\to\infty$ 且 $x=O(|\kappa|^{\rho})$，其中 $\rho<\frac{1}{3}$，則該式即为一渐近表示式 (Tricomi 1949)。

参数及变数都較大的情形还沒有系統的研究。爱尔台里 (1938 d) 在拉普拉斯型的積分表示式中应用最陡下降法來研究合流超比函数在如下条件下的性态。

(27) $x=\nu X+\xi,\ a=\nu A+\alpha,\ c-a=\nu B+\beta,\ A, B, X$ 实数，

或者是

(28) $A>0,\ X>0$

或者是

(29) $A>0,\ B>0.$

实数 A, B, X 及可能为复数的数 α, β, ξ 当 ν 通过正实数而 $\to\infty$

时均为固定的．t 的二次方程

(30)　$Xt(t+1)-A(t+1)-Bt=0$

在所討論的情形中都有两个相異的实根．在 (28) 式的情形下，令 t_1 为正根(唯一的)；在(29)的情形下令 t_2 为方程 (30) 在 -1 及 0 之間的根(唯一的)．又令

(31)　$u_h=A(1+t_h)^2+Bt_h^2=(1+t_h)(A+Xt_h^2)$　　　$h=1,2$

u_h 在所有情形下都为正的．于是得

(32)　$\Gamma(a)\Psi(a,c;x)=(2\pi/u_1)^{\frac{1}{2}}e^{-t_1x}t_1^a(1+t_1)^{c-a}[1+O(\nu^{-1})]$

$A>0,\ X>0,\ \nu\to\infty$

且

(33)　$\Gamma(a)\Gamma(c-a)\Phi(a,c;x)$

$=\Gamma(c)(2\pi/u_2)^{\frac{1}{2}}e^{-t_2x}(-t_2)^a(1+t_2)^{c-a}[1+O(\nu^{-1})]$

$A>0,\ B>0,\ \nu\to\infty$

这一式可分别从 6-5 (2) 及 6-5 (1) 中得到証明．

6-14. 乘法定理

一方面台劳的展开式

$$f(\lambda x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda-1)^n x^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}f(x)$$

另一方面，展开式

$$\lambda f(\lambda x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(1-\lambda^{-1})^n\frac{d^n}{dx^n}[x^nf(x)],$$

它是拉格郎日展开式 (E. T. Whittaker 及 G. N. Watson 1927, 7-32 節)的特殊情形，都是所有 $d^nf(x)/dx^n$ 或 $d^n[x^nf(x)]/dx^n$ 为已知的函数的“乘法定理”的根据．应用 6-4 及 6-6 節的公式可得如下的乘法公式：

(1)　$$\Phi(a,c;\lambda x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!(c)_n}(\lambda-1)^n x^n\Phi(a+n,c+n;x),$$

(2)　$$\Phi(a,c;\lambda x)=\lambda^{1-c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-c)_n}{n!}(1-\lambda)^n\Phi(a,c-n;x),$$

(3) $\Phi(a, c; \lambda x) = \lambda^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}(1-\lambda^{-1})^n \Phi(a+n, c; x)$

$\mathrm{Re}\,\lambda > \frac{1}{2}$.

(4) $\Psi(a, c; \lambda x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}(1-\lambda)^n x^n \Psi(a+n, c+n; x)$

$|\lambda - 1| < 1$,

(5) $\Psi(a, c; \lambda x) = \lambda^{1-c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c+1)_n}{n!}(1-\lambda)^n \Psi(a, c-n; x)$

$|\lambda - 1| < 1$,

(6) $\Psi(a, c; \lambda x) = \lambda^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(a-c+1)_n}{n!}(1-\lambda^{-1})^n \Psi(a+n, c; x)$

$|\lambda - 1| < 1$, $\mathrm{Re}\,\lambda > \frac{1}{2}$.

如令 $\lambda = 1 + y/x$, $\lambda x = x + y$, 则上面这些公式可重寫为加法公式. 另外一个乘法公式为

(7) $\Phi(a, c; \lambda x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(g+n)_n n!}(-x)^n F(-n, g+n; c; \lambda)$

$\times \Phi(a+n, g+2n+1; x)$,

系由爱尔台里 (1936 c) 導出. 此处 g 为任意参数,但不能为負奇数. (7) 式中的高斯級数 F 为一雅可比多項式, 当 $g = 2c-1$ 时为一特种球多項式而当 $g = c = 1$ 时为勒上特多項式.

6-15. 級数及積分公式

在最近 20 年中,在許多著作中可以看到包含合流超比函数的無窮級数或積分式的很多关系. 在这些著作中还找不出一个統一的理論,因此要將結果作全面的引述实际上是办不到的. 这里我們只提出几个較好結果作为例子,并提出一些参考文献. 所举的参考文献也是十分不完全的,其他的著作特別可在英國及印度的期刊上看到

6-15-1. 級数

所研究的合流超比函数的許多級数具有下面三种形式中的一种形式:

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \Phi(a-n, c; x)$$

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n \Phi(a+n, c+2n; x)$$

$$(3) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n \Phi(a, c+n; x)$$

一些結果列于下表

	系　　数	和
(4)	$\alpha_n=(c-c')_n/n!$ $\mathrm{Re}(2c'-c)>\frac{1}{2}$	$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c')}x^{c'-c}\Phi(a, c'; x)$
(5)	$\alpha_n=t^n(c-c')_n/n!$ $\mathrm{Re}\, c>\mathrm{Re}\, c'>0$, $\lvert t\rvert<1$, $\lvert\arg x\rvert<\frac{3}{4}\pi$	$\Gamma(c)[\Gamma(c')\Gamma(c-c')]^{-1}(1-t)^{c'-c}x^{1-c}$ $\times\int_0^x u^{c'-1}(x-u)^{c-c'-1}\Phi(a, c'; u)$ $\times\exp[-(x-u)t/(1-t)]\,du$
(6)	$\beta_n=A_n(t)$, $\lvert x\rvert<\lvert t\rvert$	$(t-x)^{-1}e^{\frac{1}{2}x}$
(7)	$\beta_n=[(-\frac{1}{2})^n/n!]$ $\times F(-n, a-c-n+1;$ $2-c; 2)$	$e^{\frac{1}{2}x}$
(8)	$\gamma_n=\frac{\Gamma(\nu+n)t^n}{n!\,\Gamma(c+n)}$ $\mathrm{Re}\, c>\mathrm{Re}\, \nu>0$	$\frac{x^{1-c}}{\Gamma(c-\nu)}\int_0^x e^{ut}u^{\nu-1}(x-u)^{c-\nu-1}$ $\times\Phi(a, c-\nu; x-u)\,du$

对于这些結果及其他有关的結果可参看爱尔台里 (1936 b, c 1937 a, c) 的著作.

在 (6) 式中

$$(9) \qquad A_n(t)=\sum_{m=0}^{n}(-\tfrac{1}{2}t)^m F(-m, a-c-n+1; 2-c)/m!$$

其他級数可参看 6–15–3 節.

6–15–2. 積分

从 6–4 及 6–6 節的微分公式中可得出合流超比函数的不定積分公式. 許多定積分公式可从 6–10 節的公式中導出.

在 6-10(5) 式中如 $k=-1$, $\mathrm{Re}\,a>\mathrm{Re}\,b>0$, 或者在 6-10(7) 式中如 $\mathrm{Re}\,a>\mathrm{Re}\,b>0$ 及 $\mathrm{Re}\,c>\mathrm{Re}\,b+1$, 则可令 $s\to 0$. 因而

$$(10)\quad \int_0^\infty t^{b-1}\Phi(a,c;-t)\,dt=\frac{\Gamma(b)\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}$$

$$0<\mathrm{Re}\,b<\mathrm{Re}\,a,$$

$$(11)\quad \int_0^\infty t^{b-1}\Psi(a,c;t)\,dt=\frac{\Gamma(b)\Gamma(a-b)\Gamma(b-c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)}$$

$$0<\mathrm{Re}\,b<\mathrm{Re}\,a,\ \mathrm{Re}\,c<\mathrm{Re}\,b+1$$

这些就是 6-5 (4) 及 6-5 (5) 式的米林反演式.

其他的积分公式有

$$(12)\quad \int_0^\infty \cos(2xy)\,\Phi(a,c;-y^2)\,dy$$

$$=\tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}x^{2a-1}e^{-x^2}\Psi(c-\tfrac{1}{2},a+\tfrac{1}{2};x^2)$$

$$(13)\quad \Gamma(a)\int_0^\infty y^{\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}}J_{c-1}[2(xy)^{\frac{1}{2}}]\,\Phi(a,c;-2y^{\frac{1}{2}})\,\Psi(a,c;2y^{\frac{1}{2}})\,dy$$

$$=2^{-c}\Gamma(c)\,x^{a-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}}[1+(1+x)^{\frac{1}{2}}]^{c-2a}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\mathrm{Re}\,c>2,\ \mathrm{Re}(c-2a)<\tfrac{1}{2}.$$

[这是 6-15 (19) 的亨克尔反演式], 互易性公式为

$$(14)\quad \Gamma(a)\int_0^\infty t^{a'-1}(1+t)^{c'-a'-1}\Psi(a,c;tx)\,dt$$

$$=\Gamma(a')\int_0^\infty t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}\Psi(a',c';tx)\,dt$$

$$\mathrm{Re}\,a>0,\ \mathrm{Re}\,a>\mathrm{Re}\,c'-1,\ \mathrm{Re}\,a'>0,\ \mathrm{Re}\,a'>\mathrm{Re}\,c-1.$$

麦格紐斯加法定理 (1946) 为

$$(15)\quad (2\pi i)^{-1}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\Gamma(-a)\,\Gamma(c-a)\,\Psi(a,c;x)\,\Psi(c-a,c;y)\,da$$

$$=\Gamma(c)\,\Psi(c,2c;x+y),$$

下面的公式是与 6-8(15) 的斯篤耳吉司反演式及米克斯奈(1933)的一些結果有密切关联的,

(16) $$\int_0^\infty e^{-x} x^{c+n-1} (x+y)^{-1} \Phi(a, c; x)\, dx$$

$$= (-1)^n \Gamma(c)\Gamma(1-a) y^{c+n-1} \Psi(c-a, c; y)$$

$$-\operatorname{Re} c < n < 1 - \operatorname{Re} a, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \quad |\arg y| < \pi,$$

对参数的積分式也曾由爱尔台里(1941)及布契霍兹(1947, 1948, 1949)算出.

在合流超比函数的零点研究中出現了另一种形式的積分. 斯維特科夫(1941)曾証明对于 Φ 的任何二个零点 ξ, η,

$$\int_0^1 [\kappa/x - \tfrac{1}{4}(\xi+\eta)] e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta)x} x^c \Phi(a, c; \xi x) \Phi(a, c; \eta x)\, dx = 0. \qquad \xi \neq \eta, \ \operatorname{Re} c > 0.$$

$$= (a/\xi) e^{-\xi} [\Phi(a+1, c; \xi)]^2 \qquad \xi = \eta, \ \operatorname{Re} c > 0.$$

而对于 Ψ 的任何两个零点 ξ, η,

$$\int_1^\infty [\kappa/x - \tfrac{1}{4}(\xi+\eta)] e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta)x} x^c \Psi(a, c; \xi x) \Psi(a, c; \eta x)\, dx = 0. \qquad \xi \neq \eta,$$

$$= -\xi^{-1} e^{-\xi} [\Psi(a-1, c; \xi)]^2 \qquad \xi = \eta.$$

这里我們还要提出一个反演公式, 它具有核

$$N(k, x) = e^{-i\pi/2} \Phi(\tfrac{1}{2}c + ik, c; ix) \qquad c > 0.$$

从
$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty N(k, x) g(k)\, dk$$

可知在某种假設下, 有

$$g(k) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}c+ik)\Gamma(\frac{1}{2}c-ik)}{2\pi[\Gamma(c)]^2} e^{k\pi} \int_0^\infty y^{c-1} N(k, y) f(y)\, dy.$$

6-15-3. 合流超比函数的積

合流超比函数乘積的研究常包括超比級数的推廣問題(見5節). 在本節中我們討論一些不出現这种推廣的情形.

比較重要的一些積分表示式有

(17) $e^{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y}\Phi(a,\ c;x)\,\Phi(a',\ c;x)$

$$=(2\pi i)^{-1}\Gamma(c)\int_L e^s\left(s-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}y\right)^{-a}\left(s+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}y\right)^{-a'}$$

$$\times\left(s+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}y\right)^{a+a'-c}F\{a,a';c;4xy[4s^2-(x-y)^2]^{-1}\}\,ds$$

式中 L 为起迄于 $-\infty$ 的一个回綫，在正方向内圍繞被積函数的全部奇点，卽圍繞四个点 $s=\pm\frac{1}{2}x\pm\frac{1}{2}y$，

(18) $\Gamma(a)\Gamma(c-a)\,\Phi(a,\ c;x)\,\Phi(a,\ c;\ -x)$

$$=[\Gamma(c)]^2x^{1-c}\int_{-\infty}^{\infty}I_{c-1}(x\,\mathrm{sech}\,t)\,e^{(c-2a)t}\,\mathrm{sech}\,t\,dt$$

$$\mathrm{Re}\,a>0,\ \ \mathrm{Re}(c-a)>0,$$

(19) $\Gamma(a)\,\Phi(a,\ c;\ -x)\,\Psi(a,\ c;x)$

$$=\Gamma(c)\,x^{1-c}\int_0^{\infty}J_{c-1}(x\,\mathrm{sh}\,t)\left(\tanh\tfrac{1}{2}t\right)^{2a-c}dt$$

$$\mathrm{Re}\,a>0,\ \ \mathrm{Re}\,x>0,$$

(20) $\pi\Psi(a,\ c;x)\,\Psi(c-a,\ c;x)$

$$=2x^{1-c}e^x\int_0^{\frac{1}{2}\pi}K_{c-1}(x\sec t)\cos[(c-2a)t]\sec t\,dt$$

$$\mathrm{Re}\,x>0,$$

(21) $\Gamma(\gamma)\,\Psi(a,\ c;x)\,\Psi(a',\ c;y)$

$$=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{\gamma-1}(x+t)^{-a}(y+t)^{-a'}$$

$$\times F[a,\ a';\ \gamma;\ t(x+y+t)(x+t)^{-1}(y+t)^{-1}]\,dt$$

$$\gamma=a+a'-c+1,\ \ \mathrm{Re}\,\gamma>0,\ \ xy\neq0.$$

还有下面的積分式：

(22) $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-st}t^{c-1}\,\Phi(a,\ c;t)\,\Phi(a',\ c;\lambda t)\,dt$

$$=\Gamma(c)(s-1)^{-a}(s-\lambda)^{-a'}s^{a+a'-c}F[a,a';c;\lambda(s-1)^{-1}(s-\lambda)^{-1}]$$

$$\mathrm{Re}\,c>0,\ \ \mathrm{Re}\,s>\mathrm{Re}\,\lambda+1,$$

(23) $\displaystyle\Gamma(a+a')\int_0^{\infty}y^{\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}c'-1}J_{c+c'-2}[2(xy)^{\frac{1}{2}}]\Psi(a,c;y)\Phi(a',c';-y)\,dy$

$$=\Gamma(c')x^{\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}c'-1}\Psi(c'-a',c+c'-a-a';x)\Phi(a',a+a';-x)$$

$$\mathrm{Re}\,c'>0,\ \ 1<\mathrm{Re}(c+c')<2\,\mathrm{Re}(a+a')+\tfrac{1}{2},$$

$$(24)\quad \Gamma(\gamma)\int_0^\infty e^{-t}t^\rho\,\Phi(a,\,c;\,t)\,\Psi(a',\,c';\,\lambda t)\,dt$$
$$=C\Gamma(c)\,\Gamma(\beta)\,\lambda^\sigma F(c-a,\,\beta;\gamma;1-\lambda^{-1}),$$

其中 $\rho=c-1,\ \sigma=-c,\ \beta=c-c'+1,\ \gamma=c-a+a'-c+1$

$C=\Gamma(a'-a)/\Gamma(a')$

或 $\rho=c+c'-2,\ \sigma=1-c-c',\ \beta=c+c'-1$

$\gamma=a'-a+c,\ C=\Gamma(a'-a-c'+1)/\Gamma(a'-c'+1).$

这些公式,以及还有其他許多積分式都可以在爱尔台里,特别是 C S. 梅杰的著作中看到. 爱尔台里 (1936 d) 还計算了以 n 个变量的劳列西拉超比函数表示的積分

$$\int_\infty^{(0+)} e^{-pz}z^q M_{\kappa_1,\,\mu_1}(a_1 z)\cdots M_{\kappa_n,\,\mu_n}(a_n z)\,dz.$$

几个包含合流超比函数乘積的無窮級数为

$$(25)\quad \sum_{n=0}^\infty\frac{(c-a)_n(c'-a')_n}{(c)_n(c')_n\,n!}\Phi(a,\,-c+n;\,x)\,\Phi(a',\,c'+n;\,y)\,z^n$$
$$=e^z\sum_{n=0}^\infty\frac{(a)_n(a')_n}{(c)_n(c')_n}\Phi(a+n,c+n;x-z)\Phi(a'+n,c'+n;y-z),$$

$$(26)\quad \sum_{n=0}^\infty\frac{(a)_n(c'-a')_n}{(c)_n(c')_n\,n!}\Phi(a+n,\,c+n;\,x-z)\,\Phi(a',\,c'+n;\,y)\,z^n$$
$$=\sum_{n=0}^\infty\frac{(c-a)_n(a')_n}{(c)_n(c')_n\,n!}\Phi(a,\,c+n;\,x)\Phi(a'+n,\,c'+n;\,y-z)z^n,$$

$$(27)\quad \sum_{n=0}^\infty\frac{(h)_n\,n!}{(c)_n(c')_n}L_n^{(c-1)}(x)\,L_n^{(c'-1)}(y)\,z^n$$
$$=(1-z)^{-h}\sum_{n=0}^\infty\frac{(h)_n}{(c)_n(c')_n\,n!}\Phi[h+n,\,c+n;\,xz(z-1)^{-1}]$$
$$\times\Phi[h+n,\,c'+n;\,yz(z-1)^{-1}]\,[xyz(1-z)^{-2}]^n$$
$$|z|<1,$$

$$(28)\quad [\Gamma(c-\lambda)]^2\sum_{n=0}^\infty\frac{\Gamma(\lambda+n)}{n!}\Phi(a-n,\,c;\,x)\,\Phi(a-n,\,c;\,y)$$
$$=[\Gamma(c)]^2(xy)^{1-c}\int_0^{\mathrm{Min}(x,\,y)}e^t t^{\lambda-1}[(x-t)(y-t)]^{c-\lambda-1}$$
$$\times\Phi(a,\,c-\lambda;\,x-t)\,\Phi(a,\,c-\lambda;\,y-t)\,dt.$$

$$(29)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(a')_n}{(c)_n(c')_n n!}\Phi(a+a'-c,\,c+2n;\,x)\,x^{2n}$$
$$=\Phi(a,\,c;\,x)\,\Phi(a',\,c;\,x)$$

这些級数引自爱尔台里的著作，他还研究了一些别的級数．还可参看貝契納尔及宗台（1940, 1941）的著作．

6-16．实数 a, c 的实零点

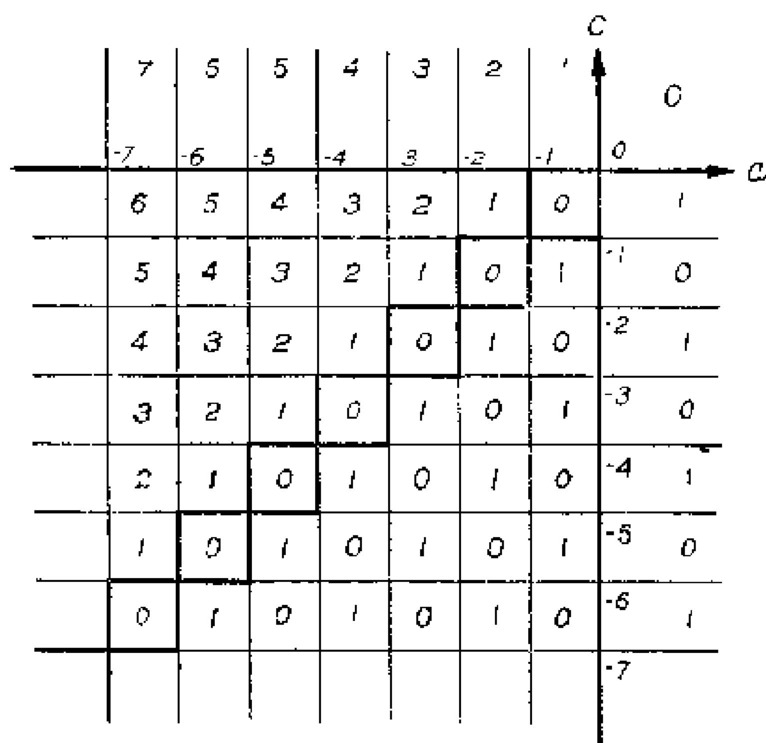
根据 6-9 (1)，6-9 (2) 式，可知 $M_{\kappa,\mu}$ 的零点与 Φ 函数的零点重合，$W_{\kappa,\mu}$ 的零点与 Ψ 函数的零点重合，而对 $x=0, \infty$ 则可能为例外．

如 a, c 为实数，则 Φ 只有有限个实零点而 Ψ 则只有有限个正零点，因为在任何有限的区間内只能有有限数目的零点，而根据 6-13 (1) 及 6-9 (3)，对足夠大的 $|x|$，将沒有零点．由 6-1 (4) 的魏塔克耳微分方程可以証明，对于实的 a 及 c，每一合流超比函数至多只能有有限数目的零点．

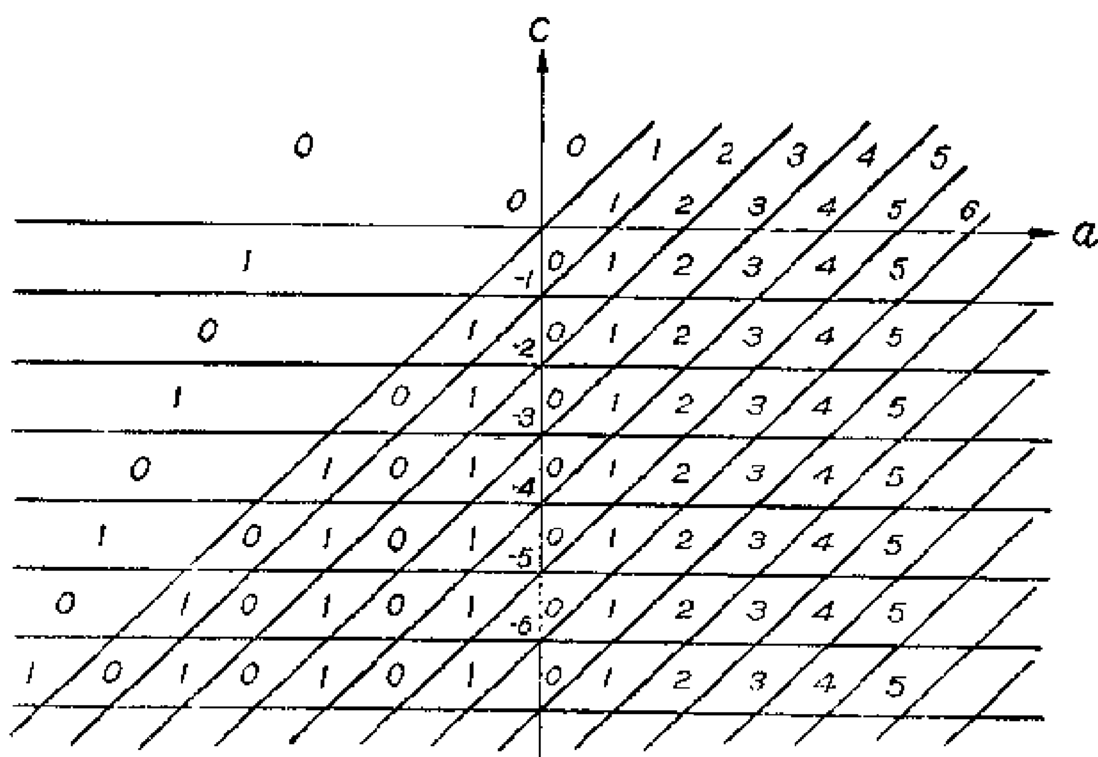
当 a, c 为实数时，$\Phi(a, c; x)$ 的零点数目的更詳細一点的研究（Kienast 1921）以如下条件为基礎，即在適当假設下，不論函数 $\Phi(a+1-j,\,c;\,x)$ $(j=0, 1, \cdots, m+1)$ 或函数 $\Phi(a+j,\,c;\,x)$ $(j=0, 1, \cdots, n)$ 形成一斯透姆鏈鎖．坎納司特的結果可以適当地用圖表示出來，圖中（实）a, c 平面分割成格子，在每一小格内，Φ 具有給定数目的正零点或負零点．在下面的几个圖中，豎直的界綫屬于界綫右边的小格，斜的界綫屬于界綫左边的小格，在水平綫上，$c=0, -1, -2, \cdots$，函数 Φ 沒有定义．

$\Psi(a, c; x)$ 的正零点可以同样研究；但对負实数 x，Ψ 一般是复数而異于零［見 6-8 (14)］．方程 6-5 (2) 及 6-5 (6) 表明当 a, c 为实数及 $a>0$ 或 $a+c-1>0$ 时 Ψ 不能有正零点．如 $-n<a<1-n$，$n=1, 2, \cdots$ 則函数 $\Psi(a+j,\,c;\,x)$，$j=0, 1, \cdots, n$ 形成一斯透姆鏈鎖；所有这些函数当 x 取大的正值时均为正的，当 $x\to 0$ 时，它們的符号可由 6-8 (2) 至 6-8 (5) 几个公式确定．由此所得

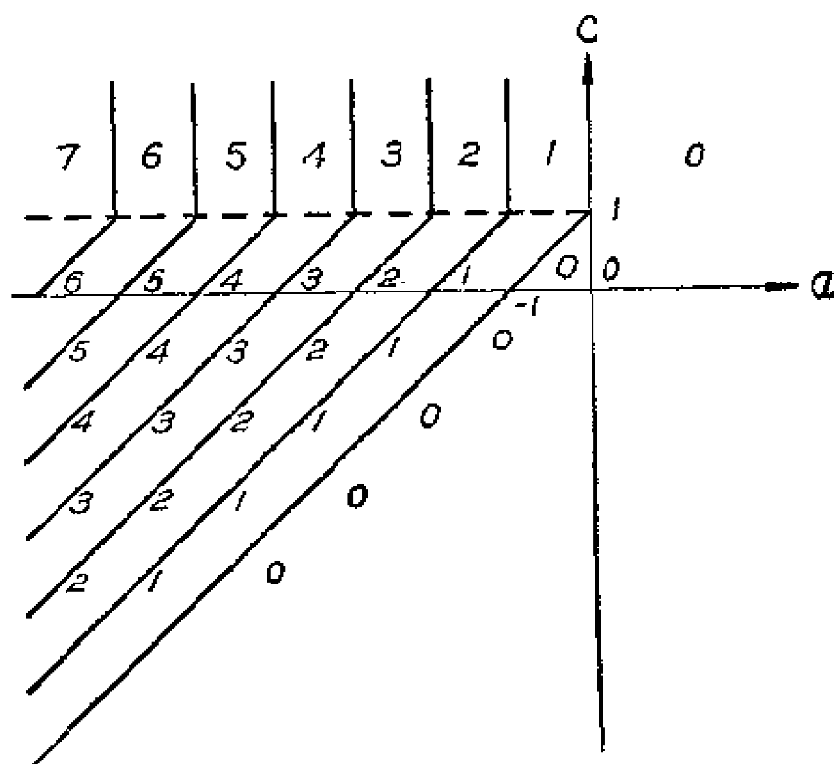
結果表示在下圖中．这些結果与 A. 迈英(1915)及 G. E. 斯維特科夫(1941 a)所得結果一致．



$\Phi(a, c; x)$ 的正零点



$\Phi(a, c; x)$ 的負零点



$\Psi(a, c; x)$ 的正零点

零点的近拟表达式曾由特列柯米 (1947) 導出. 从 6-12(11) 可知如 ξ_r 为 $\Phi(a, c; x)$的 r 階正零点, $j_{c-1,r}$ 为 $J_{c-1}(x)$ 的 r 階正零点,因此对于大的 κ,

(1) $\xi_r = j_{c-1,r}^2(4\kappa)^{-1}\{1+\frac{1}{3}[2c(c-2)+j_{c-1,r}^2](4\kappa)^{-2}\}+O(\kappa^{-4})$.

H. 許密德(1938)求得了一个类似的結果并証明以 (1) 式为一、二两項的級数当 $|a|$ 足夠大时收斂. r 階正零点可近似地表示为

(2) $\pi^2(r+\frac{1}{2}c-\frac{3}{4})^2/(2c-4a)$.

有关零点的其他細節可參看上面所举特列柯米及斯維特科夫的著作.

a, c 为实数时的复零点曾由斯維特科夫 (1941 b) 及特列柯米 (1950 a) 研究过.

6-17. a, c, x 为实数时的摹繪性質

6-16 節的結果連同 6-4 (10) 及 6-6 (11) 式那种微分公式給出了合流超比函数当 a, c, x 均为实数因而 Φ, Ψ 亦均为实数时的零点、轉向点、拐点等的数目及其近似位置. 此外,由沙湼-波利雅

定理 (Szegö 1939) 可得逐次極大及極小的值. 將 6-1 (2) 式寫成自伴形式:

(1) $$\frac{d}{dx}\left(x^{c}e^{-x}\frac{dy}{dx}\right)-ax^{c-1}e^{-x}y=0,$$

应用自伴性定理可以証明轉向值(或甚至其絕对值)將根据

(2) $$-ax^{c-1}e^{-x}\cdot x^{c}e^{-x}=-ax^{2c-1}e^{-2x}$$

为 x 的遞降或遞升函数而形成遞升或遞降序列. 因此,如

(3) $a>0$, $x<c-\frac{1}{2}$, 或 $a<0$, $x>c-\frac{1}{2}$

則 $|y|$ 的逐次極大值是上升的,如

(4) $a>0$, $x>c-\frac{1}{2}$ 或 $a<0$, $x<c-\frac{1}{2}$,

則 $|y|$ 的逐次極大值是下降的.

对于魏塔克耳函数 $M_{\kappa,\mu}$ 及 $W_{\kappa,\mu}$ 令 $\mathfrak{J}$ 表示 0 与 $2(\mu^2-\frac{1}{4})/\kappa$ 間的区間,幷对 6-1 (4) 运用沙浬-波利雅定理. 如

(5) $\kappa>0$, x 在 $\mathfrak{J}$ 之外
或
$\kappa<0$, x 在 $\mathfrak{J}$ 之內

則 $|z|$ 的逐次相对極大值为上升的,如

(6) $\kappa>0$, x 在 $\mathfrak{J}$ 之內
或
$\kappa<0$, x 在 $\mathfrak{J}$ 之外

則 $|z|$ 的逐次相对極大值为下降的. 后面一个轉向值的大小可用 6-13 節所導出的漸近表示式近似地求得.

作为一个例子,我們來研究实 x 的

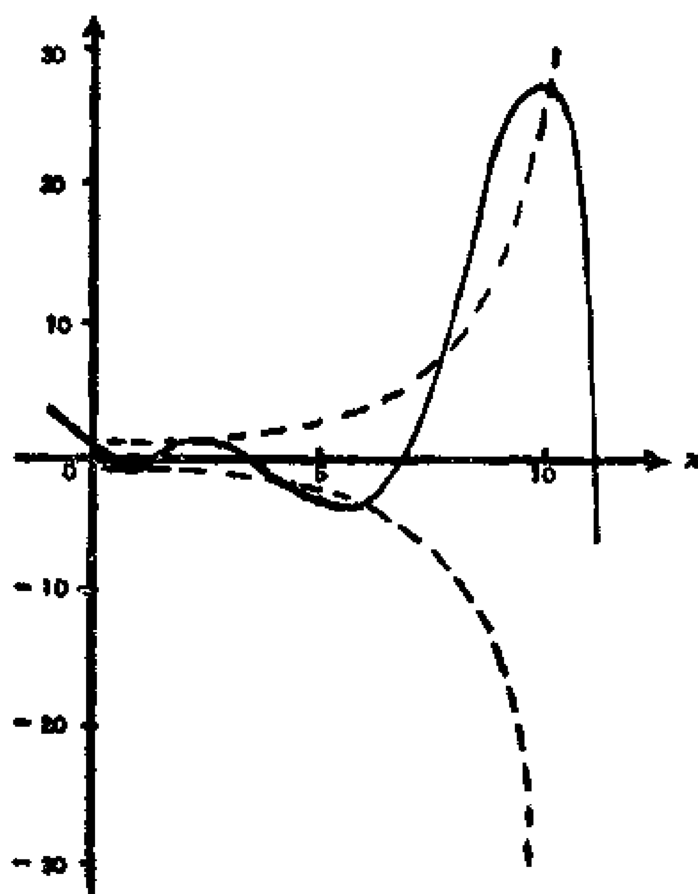
(7) $$y=\Phi(-4.5,1;x).$$

在魏塔克耳的記法中, $\kappa=5$, $\mu=0$. 由 6-4 (10),

(8) $$y'=-4.5\,\Phi(-3.5,2;x).$$

顯然 $y(0)=1$, $y'(0)=-4.5$, 因 $\Gamma(-4.5)<0$, 故从 6-13 (3) 得 $y(-\infty)=\infty$, $y'(-\infty)=\infty$, $y(+\infty)=-\infty$, $y'(\infty)=-\infty$. 从 6-16 節的圖可知, y 有 5 个正零点而沒有負零点. 从 6-16 (2) 可知 y 的零点近似地为 0.3, 1.5, 3.7、6.9、10.6, 由 6-16 (2) 及

(8) 知轉向点近似地为 $x=0.9, 2.8, 5.8, 9.9$. 此外,在所有这些点上 (2) 成立,故 $|y|$ 的極大值形成上升序列. 根据这些資料給出 y 的簡圖如下



$\Phi(-4.5, 1; x)$

參 考 文 献

Appell, Paul and J. Kampé de Fériet, 1926: *Fonctions hypergéomctriques et hypersphériques. Polynomes d' Hermite.* Gauthier-Villars.

Airey, J. R. and H. A. Webb, 1918: *Philos. Mag.* (6) 36, 129-141.

Archibald, W. J., 1938: *Philos. Mag.* (7) 26, 415-419.

Bailey, W. N., 1937: *Quart. J. Math., Oxford Ser.* 8, 51-53.

Bateman, Harry, 1931: *Trans. Amer. Math. Soc.* 33, 817-831.

Boo', P. L., 1939: *Compositio Math.* 7, 123-134.

Buchholz, Herbert, 1943: *Z. Angew. Math. Mech.* 23, 47-58, and 101-118.

Buchho z, Herbert, 1947: *Z. Physik,* 124, 196-218.

Buchholz, Herbert, 1948: *Ann. Physik,* (6) 2 185-210.

Buchholz, Herbert, 1949: *Math. Z.* 52, 355-383.

Burchnall, J. L. and T. W. Chaundy, 1940: *Quart. J. of Math.* 11, 249-270.

Burchnall, J. L. and T. W. Chaundy, 1941: *Quart. J. of Math.* 12, 112-128.

Cailler, Charles, 1920: *Enseignement Math.* 21, 221-225 and 255-259.

Chappell, G. E., 1924/25: *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 43, 117-130.

Dhar, S. C., 1933: *Bull. Calcutta Math. Soc.* 26, 57-64.

Erdélyi, Arthur, 1936 a: *Math. Ann.* 113, 357-362.

Erdélyi, Arthur, 1936 b: *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.,* 39, 1092-1098.

Erdélyi, Arthur, 1936 c: *Monatsh. Math. Phys.* 45, 31-52.

Erdélyi, Arthur, 1936 d: *Math. Z.* 42, 125-143.

Erdélyi, Arthur, 1937 a: *Math. Z.* 42, 125-143 and 641-670.

Erdélyi, Arthur, 1937 b: *Akad. Wiss. Wien. S-B II a* 146, 431-467.

Erdélyi, Arthur, 1937 c: *Monatsh. Math. Phys.* 45, 251-279.

Erdélyi, Arthur, 1937 d: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 8, 200-213.

Erdélyi, Arthur, 1937 e: *Monatsh. Math. Phys.* 46, 132-156.

Erdélyi, Arthur, 1937 f: *Monatsh. Math. Phys.* 46, 1-9.

Erdélyi, Arthur, 1938 a: *J. London Math. Soc.* 13, 146-154.

Erdélyi, Arthur, 1938 b: *Philos. Mag.* (7) 26, 871-877.

Erdélyi, Arthur, 1938 d: *Časopis Pest. Mat. Fys.* 67, 240-248.

Erdélyi, Arthur, 1938 c: *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 41, 481-486.

Erdélyi, Arthur, 1939 a: *Compositio Math.* 7, 340-352, and 6, 336-347.

Erdélyi, Arthur, 1939 b: *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 10, 176-189.

Erdélyi, Arthur, 1939 c: *Proc. Benares Math. Soc.* 1, 39-53.

Erdélyi, Arthur, 1939 d: *J. Indian Math. Soc.* 3, 169-181.

Erdélyi, Arthur, 1940 a: *Nieuw. Arch. Wiskunde* 20, 1-38.

Erdélyi, Arthur, 1941: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh.* 61, 61-70.

Fisher, E. 1935: *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 21, 529-533.

Gheorghiu, G. T., 1938: *Bull. Sci. Ecole, Polytech. Timisoara* 8, 17-27.

Giraud, Georges, 1942: *C. R. Acad. Sci. Paris,* 214, 649-651.

Gordon, W., 1928: *Ann. Physik,* 48, 180.

Gran, Olsson, R., 1937: *Ing. Arch.* 8, 99-103.

Gupta, H. C., 1948: *Proc. Nat. Acad. Sci. India Sect. A.* 13, 225-231.

Heatley, A. H., 1943: *Trans. Roy. Soc. Canada* (3), 37, 13-29.

Howell, W. J., 1939: *Philos. Mag.* (7) 28, 493-495.

Humbert, Pierre, 1921: *C. R. Acad. Sci. Paris,* 173, 217-219.

Kienast, Alfred, 1921: *Denkschr. Schw. Naturf. Gesell.* 57, 247–325.

Kummer, E. E., 1837: *J. Reine Angew. Math.* 17, 228–242.

Lowan, Arnold and W. Horenstein, 1942: *J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech* 21, 264–283.

MacRobert, R. M., 1919/20: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh.* 42, 89–96.

MacRobert, R. M., 1938: *Philos. Mag.* (7) 26, 82–93.

MacRobert, R. M., 1941: *Philos. Mag.* (7) 26, 82–93.

Magnus, Wilhelm, 1941: *Z. Physik*, 48, 343–356.

Magnus, Wilhelm, 1946: *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, 4–5.

Meijer, C. S., 1934: *Nederl. Akad. Wetensch, Proc.*, 37, 85–812.

Meijer, C. S., 1935 a: *Quart. J. Math., Oxford Ser.* 6, 241–248.

Meijer, C. S., 1935 b: *Nederl. Akad. Wetensch, Proc*, 38., 528–535.

Meijer, C. S., 1936 a: *Nederl. Akad. Wetensch, Proc.*, 39, 394–403 and 519–527.

Meijer, C. S., 1936 b: *Math. Ann.* 112, 469–489.

Meijer, C. S., 1937: *Nederl. Akad. Wetensch, Proc.*, 40, 133–141 and 871–879.

Meijer, C. S., 1938: *Nederl. Akad. Wetensch, Proc.*, 41, 42–44, 275–277, 624–633, 744–755, 879–888 and 1108–1114.

Meijer, C. S., 1941: *Nederl. Akad. Wetensch, Proc.* 44, 81–92, 186–194, 298–307, 436–451 and 590–598.

Meixner, Joseph, 1933: *Math. Z.* 36, 677–707.

Milne, Archibald, 1914/15: *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 33, 48–64.

Mitra, S. C., 1928: *Tohoku Math. J.* 29, 321–325.

Mitra, S. C., 1942: *J. Indian Math. Soc.* (*N. S.*) 6, 84–86 and 81–83.

Mohan, Brij, 1943: *Proc. Benares Math. Soc.* 4, 59–60.

Pasricha, B. R., 1943: *Proc. Benares Math. Soc.* 4, 61–69

Perron, Otto, 1921: *J. Reine. Angew. Math.* (*Crelle*) 151, 63–78.

Pinney, Edmund, 1946: *J. Math. Physics* 25, 49–79.

Pochhammer, Leo, 1890: *Math. Ann.* 35, 495–526.

Poole, E. G. C., 1935: *Proc. London Math. Soc.* (2), 38, 542–552.

Poole, E. G. C., 1938: *Quart. J. Math. Oxford. Ser.* 9, 230–233.

Schmidt, Harry, 1937: *J. Reine Angew. Math* (*Crelle*), 176, 250–252.

Shanker, Hari, 1939: *J. Indian Math. Soc.* 3, 228–230.

Shanker, Hari, 1943: *Proc. Benares Math. Soc.* 4, 51–57.

Shanker, Hari, 1946: *J. London Math. Soc.* 21, 194–198.

Sharma, G. L., 1938: *Philos. Mag.* (7) 25, 491-504.

Ser, J., 1937: *Bull. Sci. Math.* (2) 61, 74-81.

Ser, J., 1938: *Bull. Sci. Math.* (2) 62, 171-182.

Sexl, Theodor, 1929: *Z. Physik* 56, 62-93.

Sommerfeld, Arnold, 1939: *Atombau und Spektrallinien* 2° *Aufl. tome* 2, Friedrich Vieweg and Sohn, Brunswick.

Szegö, Gabor, 1939: *Orthogonal Polynomials. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications* Vol. 23, New York.

Taylor, W. C., 1939: *J. Math. Physics Mass. Inst. Tech.* 18, 34-49.

Tricomi, Francesco, 1947: *Ann. Mat. Pura Appl.* (IV), 26, 141-175.

Tricomi, Francesco, 1948: *Equazioni differenziali, Turin*, Ch. 5, § 7, 283-300.

Tricomi, Francesco, 1949: *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), 28, 263-290.

Tricomi, Francesco, 1950 a: *Math. Z.* 52, 669-675.

Tricomi, Francesco, 1950 b: *Expansion of the hypergeometric function in series of confluent ones.*

Tsvetkoff, G. E., 1941 a: *C. R. (Doklady) Acad. Sci. U. R. S. S.* 32, 10-12.

Tsvetkoff, G. E., 1941 b: *C. R.(Doklady)Acad. Sci. U. R. S. S.* 33, 290-291.

Watson, G. N., 1922: *A treatise on the theory of Bessel functions*, p. 100 MacMillan.

Whittaker, E. T. and G. N. Watson, 1927: *A course of modern analysis*, Cambridge.

索　　引

（数字代表章節）

二　　划

三　　划

四 划

五 划

六 划

七 划

八 划

九 划

十 划

十 一 划

十 二 划

十 四 划

十 五 划

十 六 划

十 八 划

記 法 表

（数字代表章節）

B

B_n 柏努利数 1-13

$B_n^{(m)}$ m 階柏努利数 1-13-1

$B_n(x)$ 柏努利多項式 1-13

$B_n^{(m)}(x|a_1\cdots a_m)$ m 階柏努利多項式 1-13-1

C

$C(x)$ 弗列司納耳積分 6-9-2

$C_n^\nu(z)$ 蓋根保多項式 3-15

$C_\nu^\lambda(z)$ 蓋根堡函数 3-15-2

$Ci(x)$ 余弦積分 6-9-2

D

$D_\nu(x)$ 抛物柱函数 6-9-2

E

$E(p; a_r; q; \rho_s; x)$ 麥克罗勃特 E 函数 5-2

E_n 欧拉数 1-14

$E_n(x)$ 欧拉多項式 1-14

$-Ei(-x)$ 指数積分 6-9-2

$Erf(x)$ 誤差函数 6-9-2

$Erfc(x)$ 誤差余函数 6-9-2

F

$F(a, b; c; z)$ 超比函数 2-1

$F(z, s)$ 1-11

${}_pF_q(a_1, \cdots a_p; b_1, \cdots b_q; z)$ 廣义超比級数 4-1

$F_\nu(z)$ 4-7

$F_1, \cdots, F_4(\cdots, x, y)$ 二变量超比級数 5-7-1

$\mathscr{F}(a, c; x)$ 6-2

G

$G(z)$, 1-8

$G_1, G_2, G_3(\cdots x, y)$ 二变量超比級数 5-7-1

$G(x)$, $G_{p,q}^{m,n}$ 梅杰 G 函数 5-3

H

$H_n(x)$ 漢米特多項式 6-9-2

$H_1, \cdots, H_7(\cdots, x, y)$ 二变量超比級数 5-7-1

$H_n(\xi, \rho, \nu)$ 4-7

J

$J_n^{\mu,\nu}(z)$ 彼得曼多項式 4-7

K

$k_\nu(x)$ 彼得曼函数 6-9-2

L

$li(x)$ 对数積分 6-9-2

M

$M(a, c, x)$ 合流超比函数 6-1

$M_{\kappa,\mu}(x)$ 魏塔克耳函数 6-9

P

$P_n(z)$ 勒让特函数 3-6-1

$P_\nu^\mu(z)$ 連帶勒让特函数 3-2

$P_\nu^\mu(x)$ 割綫上的勒让特函数 3-4

Q

$Q_n(z)$ 第二类勒让特函数 3-6-1

$Q_\nu^\mu(z)$ 第二类連帶勒让特函数 3-2

$Q_\nu^\mu(x)$ 剖割上的第二类勒让特函数 3-4

S

$S(x)$ 弗列司納耳積分 6-9-2

$Si(x)$ 正弦積分 6-9-2

W

$W_{k,\mu}(x)$ 魏塔克耳函数 6-9

Z

$Z_n(z)$ 彼得曼多項式 4-7

希腊字母

$B(x, y)$ β-函数 1-5

$\Gamma(x)$ γ 函数 1-1

$\Gamma(a, x)$ 不完全 γ 函数 6-9-2

$\gamma(a, x)$ 不完全 γ 函数 6-9-2

$\Gamma_1, \Gamma_2(\cdots x, y)$ 二变量合流超比級数 5-7-1

$\gamma_n(a, z)$ 4-7

$H_1, \cdots, H_{11}, (\cdots x, y)$ 二变量合流超比級数 5-7-1

$\zeta(s)$ ζ 函数 1-12

$\zeta(s, v)$ 1-10

$\Phi(z, s, v)$ 1-11

$\Phi(a, c; x)$ 合流超比函数 6-1

$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3(\cdots, x, y)$ 二变量合流超比級数 5-7-1

${}_r\Phi_s$ 基礎超比級数 4-8

$\psi(z)$ γ 函数的对数導数 1-7

$\Psi(a, c; x)$ 合流超比函数 6-5

$\Psi_1, \Psi_2(\cdots x, y)$ 二变量合流超比級数 5-7-1

$\Xi_1, \Xi_2(\cdots, x, y)$ 二变量合流超比級数 5-7-1

其他記法

$\arg z$ 复数 z 的幅角

$Im\, z$ 复数 z 的虛部

$Re\, z$ 复数 z 的实部

γ 欧拉-麥歇倫尼常数

$(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$

$(a)_{q,n}$ 或 $[a_n] = \prod_{\nu=0}^{n-1}(1 - aq^\nu)$

$⨍$ 積分的柯西主值

人名对照表(1)

A

Abel 阿培耳
Appell 阿贝尔

B

Bailey 巴萊
Barnes 巴尼斯
Bernoulli 柏努利
Bessel 貝塞尔
Binet 白納脫
Birkeland 柏克蘭
Borngässer 鮑耳格什
Buchholz 布契霍兹
Burchnall 貝契納尔
Burnside 貝沙特

C

Cauchy 柯西
Cayley 卡萊
Charlier 査萊
Chaundy 宗台
Cherry 齐雷
Christoffel 克列司托費耳
Chu 朱
Clausen 克劳生
Cowling 戈林

D

Darling 达林
Daum 道姆
Dirichlet 狄里克雷
Dixon 迪克斯恩
Dougall 道格尔

E

Elliot 依利沃特
Emde 爱姆特
Erdélyi 爱尔台里
Euler 欧拉

F

Fasenmyer 法申米艾
Ferrar 斐勒
Fourier 富里哀
Fresnel 弗列司納耳
Fricke 弗立克
Frink 弗林克
Frobenius 弗洛平紐司
Fuchs 富契司

G

Gauss 高斯
Gegenbauer 蓋根傍
Goursat 戈尔薩特

H

Hankel 亨克尔
Hardy 哈台
Heine 希英
Herglotz 赫格洛兹
Hermite 埃米特
Hobson 霍勃生
Horn 賀恩
Humbert 洪貝特
Hurwitz 赫威兹

I

Ince 印斯

J

Jackson 爵克生
Jacobi 雅可比

Jahnke 楊克
Jensen 金生
Jonquière 乔恩斯奎

K

Kampé de Fériet 康拜·特·范利
Kienast 坎納司特
Klein 凯林
Knar 克奈
Koppenfels 柯龐斐耳斯
Krall 克賴耳
Kramp 克倫潑
Kummer 庫曼尔

L

Lagrange 拉格朗日
Laguerre 拉盖尔
Lamé 拉美
Langer 倫乔
Laplace 拉普拉斯
Lauricella 劳列西拉
Legendre 勒让特
Lerch 李奇
Lighthill 拉爱特赫尔
Lipschitz 李普西茨

M

MacRobert 麦克罗勃特
Magnus 麦格紐斯
Malmstén 麦尔司頓
Mascheroni 麦歇倫尼
Mathieu 麦日
Mehler 米勒
Meijer 梅杰
Meixner 米克斯奈
Mellin 米林
Milne 迈英

N

Neumann 紐曼

O

Oberhettinger 奥勃赫丁乔
Olbricht 沃尔勃立契特
Ore 沃里
Orr 沃尔

P

Papperitz 巴波列茨
Parseval 巴塞凡耳
Pasternack 巴司脱納克
Perron 培隆
Pevnyi 彼尼
Picard 毕卡第
Pincherle 品卡里
Plana 普侖那
Pochhammer 波奇亨孛
Poisson 泊松
Polya 波利雅
Poole 浦耳
Preece 潘利斯

R

Raabe 雷皮
Rainville 雷維尔
Ramanujan 雷門尼强
Rice 拉爱司
Riemann 黎曼
Rodrigue 罗特列格
Rogers 罗乔司

S

Saalschütz 薩尔苏茨
Schmidt 許密德
Schwarz 許瓦茲
Seifert 薛福德
Shanker 尚坎
Smith 斯密司
Sommerfeld 松木费尔特
Sonine 沙涅
Stieltjes 斯第耳吉司

T

V

W

人名对照表(2)

三　划

万·維立克 Van Vleck

四　划

巴尼斯 Barnes
巴司脫納克 Pasternack
巴波列茨 Papperitz
巴萊 Bailey
巴塞凡耳 Parseval
戈尔薩特 Goursat
戈林 Cowling

五　划

白納脫 Binet
布契霍玆 Buchholz
卡萊 Cayley
台劳 Taylor
漢米特 Hermite
漢貝特 Humbert
弗立克 Fricke
菲列司納耳 Fresnel
弗林克 Frink
弗洛平紐司 Frobenius

六　划

朱 Chu
米克斯奈 Meixner
米林 Mellin
米勒 Mehler
托隆托 Toronto
畢卡第 Picard
華特生 Watson
迈英 Milne
齐雷 Cherry
乔恩斯垩 Joncquiere
印斯 Ince
达林 Darling

七　划

沙涅 Sonine
沃尔 Orr
沃尔勃立契特 Olbricht
沃里 Ore
麥日 Mathieu
麥尔司頓 Malmstén
麥克罗勃特 MacRobert
麥格紐斯 Magnus
麥歇倫尼 Mascheroni
李奇 Lerch
李普西茨 Lipschitz
克列司托費耳 Christoffel
克劳生 Clausen
克奈 Knar
克倫潑 Kramp
克賴耳 Krall
希英 Heinl
坎納司特 Kienast
劳列西拉 Lauricella
迪克斯恩 Dixon
狄里克雷 Dirichlet
貝沙特 Burnside
貝契納尔 Burchnall
貝塞尔 Bessel

八　划

依利沃特 Elliot
金生 Jensen
侖維尔 Rainville
彼尼 Pevnyi
亨克尔 Hankel
泊松 Poisson

波奇亨卑 Pochhammer
波利雅 Polya
法申米艾 Fasenmyer
宗台 Chaundy
拉甘尔 Laguerre
拉格朗日 Lagrange
拉美 Lamé
拉普拉斯 Laplace
拉爱司 Rice
拉爱特 Wright
拉爱特赫尔 Lighthill
松末費尔特 Sommerfeld
阿貝尔 Appell
阿培耳 Abel
欧拉 Euler
罗乔司 Rogers
罗特列恰 Rodrigue

九 划

柏克蘭 Birkeland
柏努利 Bernoulli
查萊 Charlier
柯西 Cauchy
柯龍斐耳斯 Koppenfels
哈台 Hardy
品卡里 Pincherle
韋尔司特拉斯 Weierstrass
韋勃 Weber

十 划

倫乔 Langer
高斯 Gauss
浦耳 Poole
紐孟 Neumann
特列阿米 Tricomi
爱尔台里 Erdélyi
爱姆特 Emde

十 一 划

康拜·特·范利 Kampé de Fériet
康曼尔 Kummer
陶馬 Thomae
梅杰 Meijer
勒上特 Legendre
許瓦兹 Schwarz
許密德 Schmidt
蓋根堡 Gegenbauer

十 二 划

富里哀 Fourier
富契司 Fuchs
揮普耳 Whipple
森坎 Shanker
隆司克 Wronsk
凱林 Klein
普倫那 Plana
道格尔 Dougall
道姆 Daum
斐勒 Ferrar
斯高 Szegö
斯第耳吉司 Stieltjes
斯梯林 Stirling
斯特拉頓 Stratton
斯密司 Smith
斯維特科夫 Tsvotkoff
斯透姆 Sturm
賀恩 Horn
雅可比 Jacobi

十 三 划

楊基 Jahnke
頓納萊 Tannery
雷皮 Raabe
雷門尼强 Ramanujan
奥勃赫丁乔 Oberhettinger

十 四 划

赫格洛兹 Herglotz
赫威兹 Hurwitz

十 五 划

潘利斯 Preece

潘隆 Perron
黎曼 Riemann

十 六 划

霍勃生 Hobson
鲍耳格什 Borngässer

十 七 划

薛福德 Seifert
爵克生 Jackson

十 八 划

魏丁格 Witinger
魏塔克耳 Whittaker
薩尔苏茨 Saalschütz